Известия НАН Армении, Физика, т.40, №2, с.98-104 (2005)

УДК.539.2

СПЕКТР МОД ЛИНЕЙНО-ПОЛЯРИЗОВАННОЙ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ, РАСПРОСТРАНЯЮЩЕЙСЯ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СРЕДЕ ПРОИЗВОЛЬНОГО ВИДА

Д.М. СЕДРАКЯН[1], А.Ж. ХАЧАТРЯН[2], Н.М. ИСПИРЯН[2]

[1]Ереванский физический институт

[2] Государственный инженерный университет Армении

(Поступила в редакцию 19 мая 2004 г.)

Получено общее выражение, определяющее спектр собственных мод линейно-поляризованной плоской электромагнитной волны, распространяющейся в неограниченной периодической среде. Показано, что знание амплитуды прохождения волны для одного структурного элемента периодической среды непосредственно приводит к уравнению, определяющему спектр мод. Доказано, что данное уравнение инвариантно относительно выбора структурного элемента среды.

В последнее время появился повышенный интерес к теории распространения волн в периодических слоистых средах. Этот интерес в основном обусловлен новыми технологическими успехами в разработке пассивных и активных тонкопленочных волноводов, а также твердотельных, оптических и акустических решеток, получивших большое практическое применение [1-3]. Получили большое применение также различные оптические устройства на основе так называемых планарных и тонкопленочных слоистых структур. Современная технология позволяет получить всевозможные слоистые структуры чередованием нескольких сред с различными оптическими свойствами, что в принципе дает возможность получить оптическую систему с показателем преломления, произвольным образом меняющимся от точки к точке (фотонные кристаллы) [4-6]. В связи с этим, вызывает большой интерес задача описания поля плоской, произвольно поляризованной электромагнитной волны, распространяющейся в диэлектрической среде с произвольным показателем преломления.

В данной работе нами рассматривается задача определения спектра собственных мод линейно-поляризованной, плоской электромагнитной волны, распространяющейся в произвольной одномерной, неограниченной периодической среде. Для данной среды изменение диэлектрической проницаемости в пространстве в наиболее общем виде может быть представлено в следующем виде:

$$\widetilde{\varepsilon}(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\varepsilon(z-Ln)\theta(nL-z)\theta[z-(n-1)L], \tag{1}$$

где L – период среды, $\varepsilon(z)$ – произвольная функция, $\theta(z)$ – ступенчатая функция Хевисайда.

Для удобства вывода уравнения, определяющего спектр собственных мод системы (1), предположим, что между двумя произвольными соседними элементами периодической среды существует бесконечно малая область, в которой диэлектрическая проницаемость равна единице:

$$\widetilde{\varepsilon}(z)=1, \quad \text{где} \quad nL-0<z<nL+0 \quad (n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots). \tag{2}$$

Как мы увидим ниже, данное предположение никоим образом не влияет на окончательный результат. Однородность среды в областях пространства (2) позволяет рассматривать в них волновое поле $\mathbf{U}(\mathbf{r},t)$ в виде суммы распространяющихся в противоположных направлениях, гармонических во времени, плоских, линейно поляризованных мод:

$$\mathbf{U}(\mathbf{r},t)=\mathbf{n}\,\mathrm{Re}\left[\psi(z)\exp\{ik_{0x}x\}\exp\{-i\omega t\}\right], \tag{3}$$

$$\psi(z)=A_{n-1}\exp\{ik_{0z}z\}+B_{n-1}\exp\{-ik_{0z}z\}, \tag{4}$$

где для проекций волнового вектора на оси z и x введены обозначения

$$k_{0z}=\frac{\omega}{c}\cos\alpha,\ \ k_{0x}=\frac{\omega}{c}\sin\alpha\,.$$

Единичный вектор $\mathbf{n}$ определяет направление поляризации волны. Заметим, что в (3) предполагается, что волновой вектор расположен в плоскости (z,x).

С учетом (3),(4) волновое уравнение для s-волн удобно записать с помощью напряженности электрического поля, в то время как для p-волн с помощью напряженности магнитного поля:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=\left(0,E^{s}(z)\exp\{ik_{0x}x\}\exp\{-i\omega t\},0\right), \tag{5а}$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r},t)=\left(0,H^{p}(z)\exp\{-ik_{0x}x\}\exp\{-i\omega t\},0\right). \tag{5б}$$

Для полей $E^{s}(z)$ и $H^{p}(z)$ волновые уравнения имеют следующий вид [7]:

$$\frac{d^2E^s}{dz^2}+\frac{\omega^2}{c^2}\left(\widetilde{\varepsilon}(z)-\sin^2\alpha\right)E^s=0\,, \tag{6}$$

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\widetilde{\varepsilon}(z)}\frac{dH^p(z)}{dz}\right)+\frac{\omega^2}{c^2}\left(1-\frac{\sin^2\alpha}{\widetilde{\varepsilon}(z)}\right)=0\,. \tag{7}$$

Из (3),(4) и (6),(7) непосредственно следует, что функция $\psi(z)$, в зависимости от поляризации волны $\mathbf{n}$, определяет или $E^{s}(z)$, или $H^{p}(z)$, т.е.

$$\psi(z)=\begin{cases} E^s(z), \\ H^p(z). \end{cases} \tag{8}$$

Согласно известной теореме Блоха, решение волнового уравнения для периодической среды должно удовлетворять следующему условию [7]:

$$\psi(z)=\exp\{i\beta z\}u(z), \tag{9}$$

где $u(z)$ – периодическая с периодом L функция, а величина β называется квазиволновым числом.

Как мы покажем ниже, условие (9), а также знание амплитуды прохождения волны для структурного элемента периодической среды позволяют полностью определить спектр собственных мод. Для этого запишем связь между коэффициентами решения (4) в точках nL и $(n+1)L$ через матрицу переноса одного структурного элемента периодической системы (см., например, [7]):

$$\begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(1/t_n^{s,p}\right)^* & \left(-r_n^{s,p}/t_n^{s,p}\right)^* \\ -r_n^{s,p}/t_n^{s,p} & 1/t_n^{s,p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{n-1} \\ B_{n-1} \end{pmatrix}, \tag{10}$$

где t_n^s, r_n^s и t_n^p, r_n^p являются амплитудами прохождения и отражения для s- и p-волн для n-ого структурного элемента, граничащего с обеих сторон с вакуумом. Так как структурные элементы периодической среды идентичны, то для них амплитуды прохождения электрона совпадают, в то время как амплитуды отражения отличаются фазовым множителем [8]:

$$t_n^{s,p}=t_{s,p}, \qquad r_n^{s,p}=r_{s,p}\exp\{i2k_{0z}L(n-1)\}, \tag{11}$$

где через $t_{s,p}$ и $r_{s,p}$ обозначены амплитуды рассеяния волны для первого $(n=1)$ структурного элемента среды.

С учетом (11) матричное соотношение (10) может быть записано в виде

$$A_n=\frac{1}{t_{s,p}^*}A_{n-1}-\frac{r_{s,p}^*}{t_{s,p}^*}\exp\{-i2k_{0z}L(n-1)\}B_{n-1}, \tag{12}$$

$$B_n=-\frac{r_{s,p}}{t_{s,p}}\exp\{i2k_{0z}L(n-1)\}A_{n-1}+\frac{1}{t_{s,p}}B_{n-1}. \tag{13}$$

Будем искать решение системы уравнений (12),(13) в виде

$$A_n=A_0\exp\{i(\beta-k_{0z})nL\}, \qquad B_n=B_0\exp\{i(\beta+k_{0z})nL\}, \tag{14}$$

где β – квазиволновое число (см.(9)). Подставляя решение (14) в (12),(13) и требуя, чтобы оно выполнялось для произвольного n, для величин A_0, B_0 получим следующую систему линейных однородных уравнений:

$$\left(1/t_{s,p}^*-\exp\{i(\beta-k_{0z})L\}\right)A_0-\left(r_{s,p}^*/t_{s,p}^*\right)B_0=0, \tag{15}$$

$$\left(-r_{s,p}/t_{s,p}\right)A_0+\left(1/t_{s,p}-\exp\{i(\beta+k_{oz})L\}\right)B_0=0\,. \tag{16}$$

Из (15),(16) следует, что волновое поле определяется с точностью до одной произвольной постоянной. Требование нетривиальности решения системы уравнений (15),(16) дает

$$\exp\{i2\beta L\}-\exp\{i\beta L\}\cdot 2\,\mathrm{Re}\left[\exp\{-ik_{0z}L\}/t_{s,p}\right]+1=0. \tag{17}$$

При выводе (17) мы учли

$$|\,t_{s,p}\,|^2+|\,r_{s,p}\,|^2=1\,.$$

Из (17) непосредственно следует, что

$$\cos(\beta L)=\mathrm{Re}[\exp\{-ik_{0z}L\}/t_{s,p}]\,. \tag{18}$$

Требование действительности квазиволнового числа β приводит к неравенству

$$\left|\cos(\beta L)\right|\le L\,. \tag{19}$$

Неравенство (19) с учетом (18) дает спектр собственных мод плоской электромагнитной волны для произвольной одномерной неограниченной периодической среды. Как видно из (18), знание амплитуды прохождения волны для структурного элемента среды непосредственно приводит к уравнению, определяющему спектр мод.

Рассмотрим частный случай периодической среды, когда структурный элемент представляет собой систему из двух однородных слоев, т.е.

$$\tilde{\varepsilon}(z)=\begin{cases}\varepsilon_1,\ nL<z<nL+d\,,\\ 1,\ nL+d<z<(n+1)L,\end{cases} \tag{20}$$

где $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$ В этом случае амплитуды прохождения s- и p-волн имеют вид [7]

$$\frac{1}{t_s}=\exp(ik_{0z}d)\left\{\cos(k_zd)+i\frac{k_z^2-k_{0z}^2}{2k_zk_{0z}}\sin(k_zd)\right\}, \tag{21}$$

$$\frac{1}{t_p}=\exp(ik_{0z}d)\left\{\cos(k_zd)+i\frac{\left(k_z^2/\varepsilon\right)-\left(\varepsilon\cdot k_{0z}\right)}{2k_zk_{0z}}\sin(k_zd)\right\}, \tag{22}$$

где $k_z=(\omega/c)\sqrt{\varepsilon_1}\cos\gamma$ и $\sqrt{\varepsilon_1}\sin\gamma=\sin\alpha$. Подставляя (21),(22) в (18), имеем

$$\cos\left(\beta^sL\right)=\cos[k_{0z}(L-d)]\cos(k_zd)-\frac{k_{oz}^2+k_z^2}{2k_{0z}k_z}\sin[k_{0z}(L-d)]\sin(k_zd), \tag{23}$$

$$\cos\left(\beta^pL\right)=\cos[k_{0z}(L-d)]\cos(k_zd)-\frac{\varepsilon k_{0z}^2+k_z^2/\varepsilon}{2k_{0z}k_z}\sin[k_{0z}(L-d)]\sin(k_zd)\,. \tag{24}$$

Уравнения (23),(24) являются известными классическими уравнениями, определяющими квазиволновые числа β^s и β^p s- и p-волн для неограниченной периодической системы со структурным элементом, состоящим из двух однородных слоев [9].

Докажем теперь, что полученное уравнение (18) инвариантно относительно выбора элементарного структурного элемента периодической структуры. Заметим, что произвольный сегмент длины L неограниченной среды может быть рассмотрен в качестве структурного элемента среды. Ясно также, что для двух различных структурных элементов значения амплитуды прохождения волны будут различными

В наиболее общем случае два произвольных структурных элемента, представленные как системы из двух чередующихся слоев, различаются только очередностью в расположении этих слоев. Так, если в качестве одного структурного элемента выбран сегмент $[0,L]$, а в качестве другого – сегмент $[d,L+d]$, то соответствующие им диэлектрические проницаемости $\varepsilon(z)$ и $\varepsilon'(z)$ могут быть записаны в следующем виде (см. рис.1):

$$\varepsilon(z)=\varepsilon_1(z)\theta(z)\theta(d-z)+\varepsilon_2(z)\theta(z-d)\theta(L-z), \tag{25}$$

$$\varepsilon'(z)=\varepsilon_2(z)\theta(z-d)\theta(L-z)+\varepsilon_1(z+L)\theta(z-L)\theta(L+d-z). \tag{26}$$

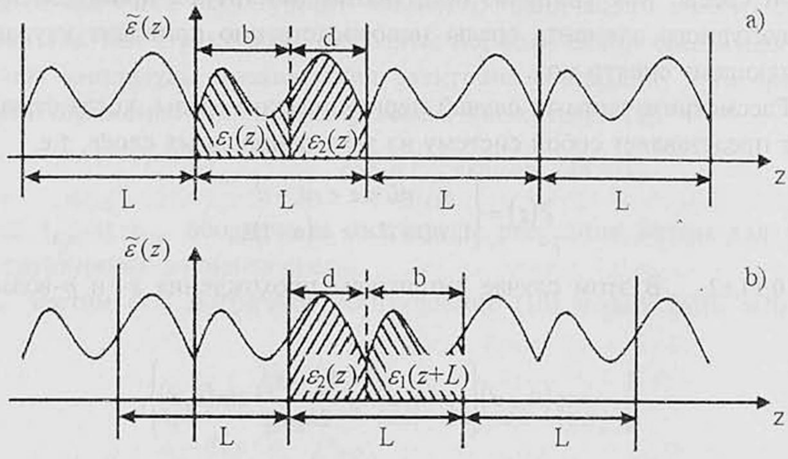

Рис.1. Два различных структурных элемента для одномерной неограниченной периодической структуры.

Обозначим через t_1,t_2,r_1,r_2 и t_1',t_2',r_1',r_2' амплитуды отражения и прохождения волны для первого и второго слоев структурных элементов (25) и (26). Для удобства, в выше сделанных обозначениях мы опустили индексы s и p. Для произвольных $\varepsilon_1(z)$ и $\varepsilon_2(z)$ амплитуды прохождения волны t и t' для первого и второго выбранных структурных элементов среды могут быть записаны в следующем виде [7]:

$$\frac{1}{t}=\frac{r_2}{t_2}\cdot\frac{r_1^*}{t_1^*}+\frac{1}{t_2}\cdot\frac{1}{t_1},\tag{27}$$

$$\frac{1}{t'}=\frac{r_2'}{t_2'}\cdot\frac{r_1'^*}{t_1'^*}+\frac{1}{t_2'}\cdot\frac{1}{t_1'}.\tag{28}$$

Так как второй слой первого структурного элемента совпадает с первым слоем второго структурного элемента, то

$$r_1'=r_2,\qquad t_1'=t_2.\tag{29}$$

Заметим также, что второй слой второго структурного элемента отличается от первого слоя первого структурного элемента только сдвигом на период L. Следовательно, можно записать

$$r_2'=r_1\exp\{i2k_{0z}L\},\qquad t_2'=t_1.\tag{30}$$

Подставляя (29),(30) в (28), имеем

$$\frac{1}{t'}=\frac{r_1}{t_1}\cdot\frac{r_2^*}{t_2^*}\exp\{i2k_{0z}L\}+\frac{1}{t_1}\cdot\frac{1}{t_2}.\tag{31}$$

Из (21) и (31) легко заметить, что

$$\exp\{-ik_{0z}L\}/t=\left(\exp\{-ik_{0z}L\}/t'\right)^*.\tag{32}$$

Из (32) непосредственно следует, что

$$\mathrm{Re}\left[\exp\{-ik_{0z}L\}/t\right]=\mathrm{Re}\left[\exp\{-ik_{0z}L\}/t'\right].\tag{33}$$

Последнее равенство доказывает инвариантность полученного уравнения (18) относительно выбора структурного элемента периодической среды.

Таким образом, мы рассмотрели задачу определения собственных мод линейно-поляризованной, плоской электромагнитной волны для произвольной, неограниченной периодической среды. Показано, что знание амплитуды прохождения волны для одного структурного элемента среды непосредственно приводит к окончательному результату. Продемонстрирована эффективность предложенного подхода на примере периодической среды со структурным элементом, состоящим из двух однородных слоев. Доказано, что уравнение, определяющее спектр собственных мод, инвариантно относительно выбора структурного элемента среды.

Авторы выражают благодарность проф. С.Г.Петросяну за полезное обсуждение полученных результатов. Данная работа выполнена в рамках Армянской Государственной программы “Полупроводниковая микроэлектроника”.

ЛИТЕРАТУРА

1. **A.Karlsson, R.Stewart.** J. Opt. Soc. Am. A, **12**, 1513 (1995).
2. **J.M.Elson, P.Tran.** J. Opt. Soc. Am. A, **12**, 1766 (1995).
3. **S.P.James, R.T.Tatam.** Meas. Sci. Technol., **14**, 49 (2003).
4. **H.S.Sozuer, J.W.Haus.** J. Opt. Soc. Am. A, **10**, 297 (1993).
5. **E.Lidorikis, E.N.Economou, C.M.Soukoilis.** Phys. Rev. Lett., **81**, 1405 (1998).
6. **М.Борн, Э.Вольф.** Основы оптики. М., Наука, 1973.
7. **D.M.Sedrakian, A.H.Gevorgyan, A.Zh.Khachatrian.** Opt. Commun., **192**, 135 (2001).
8. **Л.М.Бреховских.** Волны в слоистых средах. М., Наука, 1973.
9. **А.Ярив, П.Юх.** Оптические волны в кристаллах. М., Мир, 1987.

ԿԱՄԱՅԱԿԱՆ ՏԵՍՔԻ ԱՆՍԱՀՄԱՆԱՓԱԿ ՊԱՐԲԵՐԱԿԱՆ ՄԻՋԱՎԱՅՐՈՒՄ ՏԱՐԱԾՎՈՂ ԳԾԱՅՆՈՐԵՆ ԲԵՎԵՌԱՑՎԱԾ ՀԱՐԹ ԷԼԵԿՏՐԱՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԱԼԻՔԻ ՄՈԴԵՐԻ ՍՊԵԿՏՐԸ

Դ.Մ. ՍԵԴՐԱԿՅԱՆ, Ա.Ժ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ, Ն.Մ. ԻՍՊԻՐՅԱՆ

Ստացված է անսահմանափակ պարբերական միջավայրում տարածվող գծայնորեն բևեռացված էլեկտրամագնիսական ալիքի սեփական մոդերը որոշող ընդհանուր արտահայտություն: Ցույց է տրված, որ իմանալով ալիքի անցման ամպլիտուդը պարբերական միջավայրի մեկ կառուցվածքային տարրական միավորի համար, հնարավոր է անմիջականորեն ստանալ մոդերի սպեկտրը որոշող հավասարումը: Ապացուցված է, որ տվյալ հավասարումը ինվարիանտ է միջավայրի կառուցվածքային տարրի ընտրության նկատմամբ:

SPECTRUM OF MODES OF A LINEARLY POLARIZED PLANE ELECTROMAGNETIC WAVE TRANSMITTED THROUGH AN ARBITRARY UNLIMITED PERIODIC MEDIUM

D.M. SEDRAKIAN, A.Zh. KHACHATRIAN, N.M. ISPIRYAN

A general expression defining the spectrum of eigenmodes of a linearly polarized plane electromagnetic wave transmitted through an unlimited periodic medium is obtained. It is shown that, if the wave transmission amplitude for one structural element of a periodic medium is known then this immediately leads to the equation for the spectrum of modes. It is proved that this equation is invariant with respect to the choice of the structural element of the medium.