

УДК 535.016

МОДЕЛЬ РОЗЕНА–ЗИНЕРА В ФОТОАССОЦИИИ ХОЛОДНЫХ АТОМОВ

В.Р. КАЗАРЯН¹, А.М. МАНУКЯН¹, П.Т. ДЖУЛАКЯН², А.М. ИШХАНИЯН¹

¹Инженерный центр НАН Армении

²Институт физики, Университет Поль Верлен–Мец, Франция

(Поступила в редакцию 1 сентября 2004 г.)

Изучена модель Розена–Зинера в процессе лазерной фотоассоциации атомарного Бозе–Эйнштейновского конденсата. Применением нелинейного интегрального уравнения Вольтерра получена аналитическая формула для конечной вероятности перехода в молекулярное состояние в пределе слабого взаимодействия.

В квазирезонансном приближении полуклассические уравнения, описывающие двухмодовую фотоассоциацию Бозе–Эйнштейновского конденсата [1], имеют вид следующей системы нелинейных уравнений для амплитуд вероятностей атомарного и молекулярного состояний a_1 и a_2 [2]:

$$i \frac{da_1}{dt} = U(t) e^{-i\delta(t)} \bar{a}_1 a_2, \quad i \frac{da_2}{dt} = \frac{U(t)}{2} e^{i\delta(t)} a_1 a_1, \quad (1)$$

где t – (безразмерное) время, $U = U(t)$ – частота Раби, а $\delta = \delta(t)$ – функция модуляции расстройки. Такие же уравнения встречаются в задачах нелинейной оптики при генерации второй гармоники [3] и в различных полевых теориях, где гамильтониан содержит слагаемое вида $a_2^\dagger a_1 a_1$. Система (1) сохраняет общее число частиц, которое мы нормируем на единицу: $|a_1|^2 + 2|a_2|^2 = \text{const} = 1$. Будем считать, что до начала воздействия конденсат находился в атомарном состоянии: $a_1(-\infty) = 1$, $a_2(-\infty) = 0$. Мы исследуем следующую конфигурацию, известную как модель Розена–Зинера [4]:

$$U(t) = U_0 \text{sech}(t), \quad \delta(t) = 2\delta_0 t. \quad (2)$$

В последующем анализе используется линейный аналог системы (1):

$$i \frac{da_{1L}}{dt} = U(t) e^{-i\delta(t)} a_{2L}, \quad i \frac{da_{2L}}{dt} = U(t) e^{i\delta(t)} a_{1L}, \quad (3)$$

с такими же зависимостями $U(t)$, $\delta(t)$, начальным условием $a_{2L}(-\infty) = 0$ и интегралом движения $|a_{1L}|^2 + |a_{2L}|^2 = I_L$, где для обеспечения асимптотического совпадения в поведении систем (1) и (3) в начале процесса необходимо

выбрать $I_L=1/4$, из чего вытекает условие $a_{1L}(-\infty)=1/2$. Решение данной задачи с интегралом движения, нормированным на единицу, есть

$$\begin{aligned} a_{1RZ} &= {}_2F_1(U_0, -U_0; 1/2 + i\delta_0; x), \\ a_{2RZ} &= -iU_0((1-x)/x)^{-i\delta_0} \sqrt{x(1-x)} {}_2F_1(1+U_0, 1-U_0; 3/2 + i\delta_0; x)/(1/2 + i\delta_0), \end{aligned} \quad (4)$$

где $x = (1 + \text{th}(t))/2$, а ${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x)$ — гипергеометрическая функция Гаусса [5]. Конечная вероятность перехода на второй уровень задается известной формулой Розена-Зинера

$$P_{RZ} = (\sin(\pi U_0) \text{sech}(\pi \delta_0))^2. \quad (5)$$

Эта формула, в частности, выражает собой хорошо известную π -теорему [6], согласно которой система возвращается в исходное состояние $(a_1, a_2) = (1, 0)$, если $U_0 = n$, $n=1, 2, \dots$, а при $U_0 = 1/2 + n$ происходит максимально возможный при данной расстройке переход на второй уровень (полное инвертирование системы возможно только при точном резонансе). Решение системы (3) с нормировкой $I_L=1/4$ (с точностью до постоянного фазового множителя) имеет вид $a_{1L} = a_{1RZ}/2$, $a_{2L} = a_{2RZ}/2$.

Возвращаясь к нелинейной задаче, сделаем замену переменной $dz/dt = \text{sech}(t)$. Тогда $\delta(z) = 4\delta_0 \text{arth}(tg(z/2))$, и система (1) примет вид

$$i \frac{da_1(z)}{dz} = U_0 e^{-i\delta(z)} \bar{a}_1(z) \cdot a_2(z), \quad i \frac{da_2(z)}{dz} = \frac{U_0}{2} e^{+i\delta(z)} a_1(z) \cdot a_1(z). \quad (6)$$

Для изучения систем данного типа, т.е. с произвольным видом $\delta(z)$ и с **постоянной** U_0 , нами ранее был разработан специфический математический аппарат [7], основанный на сведении системы (6) к следующему нелинейному интегральному уравнению Вольтерра [8]:

$$p(z) = \frac{\lambda}{4} f(z) - 4\lambda \int_{-\pi/2}^z K(z, \eta) \left(p(\eta) - \frac{3}{2} p^2(\eta) \right) d\eta, \quad \lambda = U_0^2, \quad (7)$$

где
$$K(z, \eta) = (C_\delta(z) - C_\delta(\eta)) \cos(\delta(\eta)) + (S_\delta(z) - S_\delta(\eta)) \sin(\delta(\eta)), \quad (8)$$

$$f(z) = C_\delta^2(z) + S_\delta^2(z), \quad C_\delta(z) = \int_{-\pi/2}^z \cos(\delta(\xi)) d\xi, \quad S_\delta(z) = \int_{-\pi/2}^z \sin(\delta(\xi)) d\xi. \quad (9)$$

Уравнение (7) будет справедливо и для линейной системы (3), если в нем опустить член, пропорциональный p^2 . Согласно общей теории уравнений Вольтерра, если $f(x)$ и $K(x, \eta)$ ограничены, то в случае *слабой нелинейности* ($\lambda < 1$) решение задачи строится с помощью равномерно сходящегося всюду разложения Пикара [8]. Заметив, что первые три члена разложения Пикара для (7) и соответствующего линейного интегрального уравнения совпадают, можно построить более быстро сходящийся ряд путем замены $p = p_L + u$, где $p_L = |a_{2L}|^2$. Для функции $u(x)$ получается новое интегральное

уравнение хаммерштейновского типа [8]:

$$u(z) = 6\lambda \int_{-\pi/2}^z K(z, \eta) p_L^2 d\eta - 4\lambda \int_{-\pi/2}^z K(z, \eta) \left((1 - 3p_L)u - \frac{3}{2}u^2 \right) d\eta. \quad (10)$$

Нетрудно показать, что в режиме *слабого взаимодействия* можно ограничиться первым членом уравнения (10). Тем самым, приближенное решение для (6) записывается с помощью решения линейной системы (3):

$$p(z) = p_L(z) + 6\lambda \int_{-\pi/2}^z K(z, \eta) p_L^2 d\eta. \quad (11)$$

Далее, для расчета интеграла в (11) с точностью до заданной степени λ может быть использована аппроксимация линейного решения p_L конечным числом слагаемых из его пикаровского ряда. В простейшем случае, для расчета с точностью до $O(\lambda^4)$, можно, очевидно, ограничиться первым порядком разложения, т.е. положить $p_L(z) \approx \lambda f(z)/4$. Для улучшения данного приближения можно ввести некий корректирующий коэффициент, тем самым рассмотрев более общее приближение вида $p_L(z) \equiv A f(z)$. Соответствующие соображения для определения значения коэффициента A будут приведены ниже. Функции C_δ и S_δ можно вычислить в явном виде, рассмотрев вспомогательный интеграл

$$F(z) \equiv C_\delta + iS_\delta = \int_{-\pi/2}^z \exp(i\delta(\xi)) d\xi = B_y(1/2 + i\delta_0, 1/2 - i\delta_0), \quad y = \sin^2(z/2 + \pi/2). \quad (12)$$

Следовательно,

$$C_\delta = \text{Re}(B_y(1/2 + i\delta_0, 1/2 - i\delta_0)), \quad S_\delta = \text{Im}(B_y(1/2 + i\delta_0, 1/2 - i\delta_0)). \quad (13)$$

Тогда формула (11) при $t \rightarrow +\infty$ примет вид $p(+\infty) = P_{RZ}/4 + u(+\infty)$, где $u(+\infty) \approx 6\lambda A^2 C_\infty^3$ и $C_\infty = \pi \text{sech}(\pi\delta_0)$. Таким образом, решение нелинейной задачи (1) с точностью до $O(\lambda^4)$ определяется следующей формулой ($A = \lambda/4$):

$$p(+\infty) \approx P_{RZ}/4 + 3\lambda^3 C_\infty^3/8. \quad (14)$$

Данная формула довольно хорошо описывает процесс образования молекул до тех пор, пока $\lambda \approx 0.1$. После превышения этого уровня наблюдается резкое расхождение с точным значением вероятности перехода, полученной путем численного интегрирования системы (1). Причина подобного поведения полученного решения (14) очевидна: так как P_{RZ} является ограниченной величиной, а C_∞ не зависит от U_0 , то величина $p(+\infty)$, заданная формулой (14), неограниченно растет при возрастании U_0 , превышая максимально допустимое нормировкой значение 1/2 уже при $\lambda = 0.3$ ($\delta_0 \approx 0$). Однако, полученную формулу можно так модифицировать, чтобы добиться существенного улучшения результата. Это можно сделать, заметив, что линейное

решение p_L при малых ненулевых λ намного лучше аппроксимируется формулой вида $p_L \approx P_{RZ} f / (4f(+\infty)) = P_{RZ} f / (4C_\infty^2)$. Этому, очевидно, соответствует выбор $A = P_{LZ} / (4C_\infty^2)$, что приводит к значительно лучшей по своей структуре формуле:

$$p(+\infty) \approx P_{RZ} / 4 + 6\lambda (P_{RZ} / 4)^2 / C_\infty. \quad (15)$$

Действительно, в отличие от формулы (14), вероятность перехода $p(+\infty)$, определенная данной формулой, остается меньше 1/2 при всех $\lambda \leq 1$, то есть во всей той области, где вообще имеет смысл пытаться ограничиться только первым членом пикаровского разложения для u . Полученная формула, однако, дает численно удовлетворительное приближение только до $\lambda \leq 0.15$. Причины появления последнего дополнительного ограничения заслуживают особого внимания, и к этому мы вернемся чуть позже. Но предварительно покажем, что имеется нетривиальный способ для еще более существенного улучшения этого результата. Заметим сначала, что, с точностью до постоянного множителя, функция $F(z) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} (e^{i\pi/2} a_{2RZ} / \sqrt{\lambda})$. Это наблюдение подсказывает заменить в уравнении (11) функции C_δ и S_δ на $-\text{Im}(a_{2RZ}) / \sqrt{\lambda}$ и $\text{Re}(a_{2RZ}) / \sqrt{\lambda}$, соответственно, а $\cos(\delta(z))$ и $\sin(\delta(z))$ на соответствующие производные. Нетрудно видеть, что это примерно эквивалентно замене $C_\infty = \sqrt{P_{RZ} / \lambda}$ в (15). В результате имеем

$$p(+\infty) \approx P_{RZ} / 4 + 3(\lambda P_{RZ} / 4)^{3/2}. \quad (16)$$

Более точные выкладки с учетом свойств a_{2RZ} показывают, что

$$p(+\infty) \approx P_{RZ} / 4 + 3(1 + 2\lambda)(\lambda P_{RZ} / 4)^{3/2}. \quad (17)$$

Полученная формула дает очень хорошее приближение вплоть до $\lambda \leq 0.25$ (относительная ошибка порядка долей процента). Поведение $p(+\infty)$ как функции от U_0 при различных значениях δ_0 показано на рис. 1.

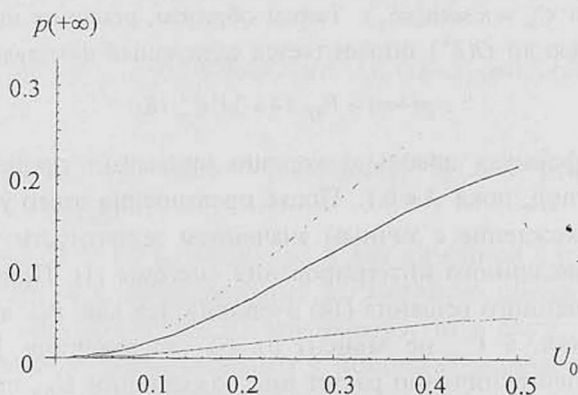


Рис. 1. Конечная вероятность перехода в молекулярное состояние как функция от U_0 . $\delta_0 = 10^{-6}$ – верхняя кривая, $\delta_0 = 0.2$ – средняя кривая, $\delta_0 = 0.5$ – нижняя кривая.

Обсудим теперь более подробно область применимости полученных формул и причину возникновения ограничения на λ . Рассуждения, лежащие в основе вышеприведенных выкладок, опираются на предположение о малости последующих пикаровских приближений для u по сравнению с первым членом пикаровского разложения

$$u_0 = 6\lambda \int_{-\pi/2}^z K(z, \eta) p_L^2 d\eta. \quad (18)$$

Как следует из уравнения (10), второй пикаровский терм имеет вид

$$u_1 = -4\lambda \int_{-\pi/2}^z K(z, \eta) \left[(1 - 3p_L)u_0 - \frac{3}{2}u_0^2 \right] d\eta. \quad (19)$$

Как непосредственно видно, если $\lambda \ll 1$ и $p_L = O(\lambda)$, то предположение $u_1 \ll u_0$ заведомо выполняется. Разумеется, это имеет место при $\lambda \leq 0.1$ и, как уже отмечалось выше, именно это и определяет область применимости формул (14) и (15). Ситуация однако сильно меняется уже при $\lambda \approx 0.2 \div 0.3$. Во-первых, уже нельзя считать, что λ намного меньше единицы, а во-вторых, что не менее важно, вероятность линейного перехода p_L уже не намного меньше единицы. Последнее видно уже из формулы Розена-Зинера (5): конечная вероятность линейного перехода $p_L(+\infty) = P_{RZ} / 4$ при $\delta_0 \approx 0$ примерно равна 0.25. Таким образом, строго, в рассматриваемой модели Розена-Зинера (2) **слабо-нелинейными** следует считать случаи полей с амплитудой $U_0 \leq 0.3$ ($\lambda \leq 0.1$). Обратим внимание, что это обстоятельство не является априорно очевидным. Например, для сравнения, в модели Ландау-Зинера пределу слабой нелинейности соответствует $\lambda < 1$ [9]. Таким образом, случаи с $U_0 > 0.3$ ($\lambda > 0.1$) относятся к промежуточным между сильно-нелинейными и слабо-нелинейными. Именно поэтому модификации (16) и (17), применимые вплоть до $\lambda \leq 0.25$, очень существенны. Можно было бы надеяться, что последняя формула будет применима и при несколько больших λ , если $\delta_0 \geq \lambda$, ибо тогда, благодаря наличию фактора $(\text{sech}(\pi\delta_0))^2$ в формуле (5), $p_L(+\infty) \ll 1$. В определенной степени это предположение справедливо, однако теперь относительная ошибка значительно больше и составляет порядка нескольких процентов уже при $\lambda \approx 0.5$. Причина этого состоит в том, что линейное решение $p_{2RZ}(t)$ Розена-Зинера [см. (4)] в окрестности точки $t=0$ достигает значений порядка единицы независимо от значения δ_0 (при умеренных и больших значениях δ_0 имеется выраженный максимум). Это не трудно видеть, рассмотрев, например, поведение линейного решения при $\lambda=1$, когда гипергеометрические ряды в (4) обрываются и получается элементарное решение $p_{2RZ} = (\text{sech}(t))^2 / (1 + 4\delta_0^2)$. Как видно, при умеренных $\delta_0 \approx 0.5$ в $t=0$ имеем $p_{2RZ}(0) \approx 0.5$. Таким образом, общее заключение таково, что при $\lambda > 0.25 \div 0.3$ нельзя ограничиться только первым членом пикаровского разложения для u , ибо последующие члены играют существенную

роль. Тем самым, данный режим следует отнести к сильно-нелинейному.

Работа выполнена при поддержке грантов Фонда Гражданских Исследований и Разработок США (CRDF) No. PH 100-02, Армянского Национального Фонда Науки и Образования (ANSEF) No. PS-10-2005 и PA № 0591-2002.

ЛИТЕРАТУРА

1. M.H.Anderson, J.R.Ensher, M.R.Matthews, C.E.Wieman, and E.A.Cornell. Science, 269, 198 (1995); K.B.Davis, M.-O.Mewes, M.R.Andrews, N.J. van Druten, D.S.Durfee, D.M.Kurn, and W.Ketterle. Phys. Rev. Lett., 75, 3969 (1995); C.C.Bradley, C.A.Sackett, J.J. Tollett, and R.G. Hulet. ibid, 75, 1687 (1995).
2. J. Javanainen and M. Mackie. Phys. Rev. A, 59, R3186 (1999); M. Kostrun, M.Mackie, R.Cote, and J.Javanainen. Phys. Rev. A, 62, 063616 (2000).
3. Y.R.Shen. The Principles of Nonlinear Optics. Wiley, New York, 2002; R.W.Boyd. Nonlinear Optics. Boston, Academic Press, 1992; A.Yariv. Quantum Electronics. Wiley, New York, 1989; P.N.Butcher and D.Cotter. The Elements of Nonlinear Optics. Cambridge University Press, Cambridge, 1991; S.A.Akhmanov and R.V.Khokhlov. Problems of Nonlinear Optics. Gordon and Breach, New York, 1972.
4. N.Rosen and C.Zener. Phys. Rev., 40, 502 (1932).
5. M.Abramowitz and I.A.Stegun. Handbook of Mathematical Functions. Dover, New York, 1965; A.Erdelyi, W.Magnus, F.Oberhettinger, and F.G.Tricomi. Higher Transcendental Functions. McGraw-Hill, New York, 1953.
6. B.W.Shore. The Theory of Coherent Atomic Excitation. Wiley, New York, 1990.
7. А.М.Ишханян. Изв. НАН Армении, Физика, 39, 1 (2004).
8. F.G.Tricomi. Integral Equations. Dover Publications, New York, 1985; T.A.Burton. Volterra Integral and Differential Equations. Academic Press, New York, 1983; R.K.Miller. Nonlinear Volterra Integral Equations. Benjamin, New York, 1971.
9. А.М.Ишханян. ДАН Армении, 104, №2, 112 (2004); A.Ishkhanyan, M.Mackie, A.Carmichael, P.L.Gould, and J.Javanainen. Phys. Rev. A, 69, 043612 (2004).

ՌՈԶԵՆ-ԶԵՆԵՐԻ ՄՈԴԵԼԸ ՍԱՌՆ ԱՏՈՄՆԵՐԻ ՖՈՏՈԱՍՈՑԻԱՑԻԱՅՈՒՄ

Վ.Ռ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, Ա.Մ. ՄԱՆՈՒԿՅԱՆ, Դ.Տ. ԶՈՒԼԿՅԱՆ, Ա.Մ. ԻՇԽԱՆՅԱՆ

Ուսումնասիրված է Ռոզեն-Զեների մոդելը ատոմական Բոզե-Էյնշտեյնյան կոնդենստի լազերային ֆոտոասոցիացիայի պրոցեսում: Վոլտերրայի ոչ-գծային մի ինտեգրալ հավասարման կիրառմամբ ստացված է մոլեկուլային վիճակի անցման վերջնական հավանականության անալիտիկ բանաձև թույլ փոխազդեցության սահմանի համար:

ROZEN-ZENER MODEL IN COLD ATOM PHOTOASSOCIATION

V.R. GHAZARYAN, A.M. MANUKYAN, B.T. JOULAKIAN, A.M. ISHKHANYAN

The Rozen-Zener model in a process of laser photoassociation of an atomic Bose-Einstein condensate is studied. Using a nonlinear Volterra integral equation, an analytic formula for the final probability of the transition to the molecular state is obtained for the weak interaction limit.