Известия НАН Армении, Физика, т.40, №1, с.16-21 (2005)

УДК 535.016

ПЕРВАЯ МОДЕЛЬ ДЕМКОВА–КУНИКЕ В ТЕОРИИ ФОТОАССОЦИАЦИИ ХОЛОДНЫХ АТОМОВ

В.Р. КАЗАРЯН

Инженерный центр НАН Армении

(Поступила в редакцию 1 сентября 2004 г.)

Изучена первая модель Демкова–Кунике прохождения резонанса в процессе лазерной фотоассоциации атомарного Бозе–Эйнштейновского конденсата. С помощью применения нелинейного интегрального уравнения Вольтерра получена аналитическая формула для конечной вероятности перехода в молекулярное состояние в пределе слабого взаимодействия.

Получение сверххолодных молекул посредством фотоассоциации или Фешбах-резонанса в атомомолекулярных Бозе-конденсатах и сверхохлажденных ферми-газах является одной из наиболее важных задач современной атомной и молекулярной физики. Исследованию этой проблемы в последние годы посвящено множество и экспериментальных, и теоретических работ. Общей задачей здесь является эффективное управление неадиабатическими квантовыми переходами с помощью внешних лазерных или магнитных полей. В данном контексте важную роль играют эффекты, зависящие от конфигурации импульса. В такого рода задачах наиболее простой и широко используемой моделью является модель Ландау–Зинера [1] (модель с постоянной амплитудой поля и линейным прохождением резонанса). Но с физической (и в некотором смысле с математической) точки зрения эта модель имеет ряд существенных недостатков, таких как бесконечная энергия внешнего поля при $t \to \pm\infty$ и линейно изменяющаяся во времени расстройка частоты. Последнее допущение, хотя оно и довольно хорошо описывает ситуацию около точки резонансного перехода, все же нефизично, ибо экспериментально реализуемым является только конечное значение расстройки при $t \to \pm\infty$. Следовательно, рассмотрение моделей с отсутствием упомянутых недостатков даст более точное представление о поведении Бозе-конденсата. Такой моделью является, например, первая модель Демкова–Кунике [2], представляющая собой усовершенствованный, физически более корректный и экспериментально реализуемый вариант модели с (приблизительно) линейным прохождением резонанса.

В квазирезонансном приближении полуклассические уравнения, описывающие двухмодовую фотоассоциацию [3] Бозе–Эйнштейновского конденсата [4], имеют вид следующей системы нелинейных уравнений для амплитуд вероятностей атомарного и молекулярного состояний a_1 и a_2:

$$i\frac{da_1}{dt} = U(t)e^{-i\delta(t)}\bar{a}_1 a_2, \quad i\frac{da_2}{dt} = \frac{U(t)}{2}e^{i\delta(t)}a_1 a_1, \tag{1}$$

где t – (безразмерное) время, $U=U(t)$ – частота Раби, а $\delta=\delta(t)$ – функция модуляции расстройки. Такие же уравнения встречаются в задачах нелинейной оптики при генерации второй гармоники [5] и в различных полевых теориях, где гамильтониан содержит слагаемое вида $a_2^+ a_1 a_1$. Система (1) сохраняет общее число частиц, которое мы нормируем на единицу: $|a_1|^2 + 2|a_2|^2 = \text{const} = 1$. Будем считать, что до начала воздействия конденсат находился в атомарном состоянии: $a_1(-\infty) = 1, a_2(-\infty) = 0$.

Важным общим свойством системы (1) является, как и в линейной двухуровневой задаче, *классовое свойство* решений [6], согласно которому, если $a_{1,2}^*(x)$, $U^*(x)$, и $\delta^*(x)$ удовлетворяют системе (1), переписанной для переменной x, то решение системы (1) для функций $U(t)$ и $\delta(t)$, определенных в виде

$$U(t) = U^*(x)(dx/dt), \quad \delta_t(t) = \delta_x^*(x)(dx/dt) \tag{2}$$

для *произвольных* $x(t)$, выражается как $a_{1,2}(t)=a_{1,2}^*(x(t))$. Это дает возможность записать решение для любого члена определенного класса через решение для базовых представителей $U^*(x)$, $\delta^*(x)$ этого класса. Рассматриваемая здесь первая модель Демкова–Кунике

$$U(t) = U_0\,\mathrm{sech}(t), \quad \delta_t(t) = 2\delta_2\tanh(t) \tag{3}$$

принадлежит к классу, порожденному базовой моделью [6]

$$U^*(x) = \frac{U_0}{\sqrt{x(1-x)}}, \qquad \delta_x^*(x) = \frac{\delta_1}{x} + \frac{\delta_2}{1-x}. \tag{4}$$

При произвольном реальном $x(t)$ данный класс представляет собой семейство Хью–Кэролла, содержащее ряд важных представителей, таких как асимметричные импульсы с постоянной расстройкой поля ($\delta_t(t)=\Delta$) Бамбини–Бермана, знаменитая модель Розена–Зинера и т.д. [6]. Первая модель Демкова–Кунике получается при замене $x(t) = (1+\tanh(t))/2$. При разных значениях параметров δ_1 и δ_2 данная модель описывает процессы как без пересечения уровней (δ_1 и δ_2 одного знака), так и с пересечением (δ_1 и δ_2 разного знака). Модели Розена–Зинера, для которой расстройка поля постоянна, соответствует выбор $\delta_1 = \delta_2$. Нашей же модели (3) соответствует спецификация $\delta_1 = -\delta_2$. Базовая функция модуляции расстройки внешнего поля, соответствующая (3), имеет вид $\delta^*(x) = \ln[2^{-2\delta_2}(x(1-x))^{-\delta_2}]$.

При решении системы (1) нами используется ее линейный аналог:

$$i\frac{da_{1L}}{dt} = U(t)e^{-i\delta(t)}a_{2L}, \quad i\frac{da_{2L}}{dt} = U(t)e^{i\delta(t)}a_{1L}, \tag{5}$$

с такими же $U(t)$, $\delta(t)$, начальным условием $a_{2L}(-\infty)=0$ и интегралом движения $|a_1|^2+|a_2|^2=I_L$, где для обеспечения асимптотического совпадения в поведениях систем (1) и (5) в начале процесса необходимо выбрать I_L=1/4, из чего вытекает условие $a_{1L}(-\infty)=1/2$. Решение данной линейной задачи для первой модели Демкова–Кунике с интегралом движения I_L=1/4 есть:

$$a_{1L}=2^{-1}\cdot{}_2F_1(-i\delta_2+\sqrt{U_0^2-\delta_2^2},-i\delta_2-\sqrt{U_0^2-\delta_2^2};1/2-i\delta_2;x),$$
$$a_{2L}=\frac{4^{-i\delta_2}U_0}{i+2\delta_2}(x(1-x))^{1/2-i\delta_2}\cdot{}_2F_1(1-i\delta_2+\sqrt{U_0^2-\delta_2^2},1-i\delta_2-\sqrt{U_0^2-\delta_2^2};3/2-i\delta_2;x), \tag{6}$$

где $x(t)=(1+\tanh(t))/2$, а ${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x)$ – гипергеометрическая функция Гаусса [7]. Конечная вероятность перехода выражается через известную формулу

$$p_L(t\to\infty)=|a_{2L}(t\to\infty)|^2=p_{DK}/4=\left[1-\cosh^2\left(\pi\sqrt{\delta_2^2-U_0^2}\right)\mathrm{sech}^2\,\pi\delta_2\right]/4\,. \tag{7}$$

Для решения системы (1) ранее был предложен метод интегрального уравнения Вольтерра, позволяющий избавиться от известных проблем с расходимостью [8] и построить решение в виде сходящегося ряда для случая малых интенсивностей внешнего поля. Интегральное уравнение Вольтерра, эквивалентное исходной системе уравнений (1), имеет вид [8]

$$p(x)=C_1C_\delta^*(x)+C_2S_\delta^*(x)+\frac{U_0^2}{4}f_0-4U_0^2\int_{x_0}^{x}K^*(x,\xi)\frac{U^*(\xi)}{U_0}\left(p(\xi)-\frac{3}{2}p^2(\xi)\right)d\xi\,, \tag{8}$$

где для рассматриваемых начальных условий $C_1=C_2=0$, а ядро $K^*(x,\xi)$ и функции $C_\delta^*(x)$, $S_\delta^*(x)$ и $f_0(x)$ для модели (4) определены следующим образом:

$$K^*(x,\xi)=[C_\delta^*(x)-C_\delta^*(\xi)]\cos\delta^*(\xi)+[S_\delta^*(x)-S_\delta^*(\xi)]\sin\delta^*(\xi),$$
$$C_\delta^*(x)=\left[2^{2i\delta_2}B_x(1/2+i\delta_2,1/2+i\delta_2)+2^{-2i\delta_2}B_x(1/2-i\delta_2,1/2-i\delta_2)\right]/2,$$
$$S_\delta^*(x)=i\left[2^{2i\delta_2}B_x(1/2+i\delta_2,1/2+i\delta_2)-2^{-2i\delta_2}B_x(1/2-i\delta_2,1/2-i\delta_2)\right]/2, \tag{9}$$
$$f_0(x)=B_x(1/2+i\delta_2,1/2+i\delta_2)B_x(1/2-i\delta_2,1/2-i\delta_2).$$

Отметим, что уравнение (8) будет справедливо и для линейной системы (3), если в нем опустить член, пропорциональный p^2.

Согласно общей теории уравнений Вольтерра, если $f_0^*(x)$ и $K^*(x,\xi)$ ограничены, то в случае *слабой нелинейности* ($U_0^2<1$) решение задачи строится с помощью равномерно сходящегося всюду разложения Пикара [9] (в качестве нулевого приближения берется $p_0=C_1C_\delta^*(x)+C_2S_\delta^*(x)+U_0^2f_0/4$ [8]). Заметив, что первые три члена разложения Пикара для (8) и соответствующего линейного интегрального уравнения совпадают, становится возможным построение быстро сходящегося ряда путем замены $p=p_L+u$, где $p_L=|a_{2L}|^2$. Для функции $u(x)$ получается новое интегральное уравнение хаммерштейновского типа [9]:

$$u(x)=u_0(x)-4U_0^2\int_{x_0}^{x}K^*(x,\xi)\frac{U^*(\xi)}{U_0}\left((1-3p_L(\xi))u(\xi)-\frac{3}{2}u^2(\xi)\right)d\xi\,, \qquad (10)$$

где

$$u_0(x)=6U_0^2\int_{x_0}^{x}K^*(x,\xi)\frac{U^*(\xi)}{U_0}p_L^2(\xi)d\xi\,. \qquad (11)$$

Нетрудно показать, что в режиме *слабого взаимодействия* можно ограничиться первым членом уравнения (10). Тем самым, приближенное решение для (1) записывается с помощью решения линейной системы (5):

$$p(x)=p_L(x)+6U_0^2\int_{x_0}^{x}K^*(x,\xi)\frac{U^*(\xi)}{U_0}p_L^2(\xi)d\xi\,. \qquad (12)$$

Для расчета интеграла в (12) с точностью до заданной степени U_0^2 используется аппроксимация p_L конечным числом слагаемых его пикаровского ряда. Ограничиваясь точностью до $O(U_0^8)$ (первым порядком разложения), положим $p_L(x)\cong A\,f_0(x)$ и после некоторых вычислений получим конечную вероятность перехода в молекулярное состояние:

$$p(1)=p_L(1)+12A^2U_0^2\int_0^1(C_0\cos(\delta^*(\xi))+S_0\sin(\delta^*(\xi)))\frac{U^*(\xi)}{U_0}g(\xi)d\xi\,, \qquad (13)$$

где $g(x)=f_0(x)f_0(1-x)$. Далее, можно показать, что функция $g(x)$ при малых и умеренных расстройках (до $\delta_2/U_0\sim 1$) хорошо аппроксимируется формулой $g(x)\approx g(1/2)\cdot 4x(1-x)$. Случай $\delta_2/U_0>>1$ особого интереса не представляет, поскольку при очень слабых полях ($U_0^2<<1$) или слишком больших расстройках ($\delta_2>>1$) переход в молекулярное состояние практически отсутствует. С этой подстановкой интеграл в (13) аналитически легко вычисляется, и решение нелинейной задачи (1) при $t\to\infty$ с точностью до $O(U_0^8)$ определяется следующей формулой ($A=p_{DK}/(4f_0(1))$):

$$p_\infty=p(t\to+\infty)=\frac{p_{DK}}{4}\left(1+\frac{3U_0^2}{16}\frac{1+2\delta_2^2}{1+\delta_2^2}f_0(+\infty)\frac{p_{DK}}{4}\right),\quad f_0(+\infty)=\frac{\pi\tanh(\pi\delta_2)}{\delta_2}. \qquad (14)$$

Данная формула довольно хорошо согласуется с численным решением (1) (см. рис.1). Модель Демкова–Кунике (3) переходит в модель Ландау–Зинера $U(t)=U_0=\text{const}$, $\delta_t(t)=2\delta_{LZ}t$, если перейти к размерной переменной t/τ, положить $\delta_2=\delta_{LZ}\tau$ и устремить τ к бесконечности. Записав решение (14) в размерном виде (данная процедура равносильна замене $U_0\to\tau U_0$, $\delta_2\to\tau\delta_2$) и переходя к указанному пределу, можно убедиться, что полученная нами формула (14) переходит в соответствующую формулу для нелинейной модели Ландау–Зинера, полученную в [10], с небольшой разницей в числовом множителе перед нелинейной поправкой. Действительно, имеем

$$p_\infty(\delta_2 \to \infty) = \frac{1 - e^{-\pi U_0^2/\delta_{LZ}}}{4}\left(1 + \frac{3\pi}{8}\frac{U_0^2}{\delta_{LZ}}\frac{1 - e^{-\pi U_0^2/\delta_{LZ}}}{4}\right), \tag{15}$$

а формула для модели Ландау–Зинера [10] гласит

$$p_{LZ}^N = \frac{1 - e^{-\pi U_0^2/\delta_{LZ}}}{4}\left(1 + \frac{4}{\pi}\frac{U_0^2}{\delta_{LZ}}\frac{1 - e^{-\pi U_0^2/\delta_{LZ}}}{4}\right). \tag{16}$$

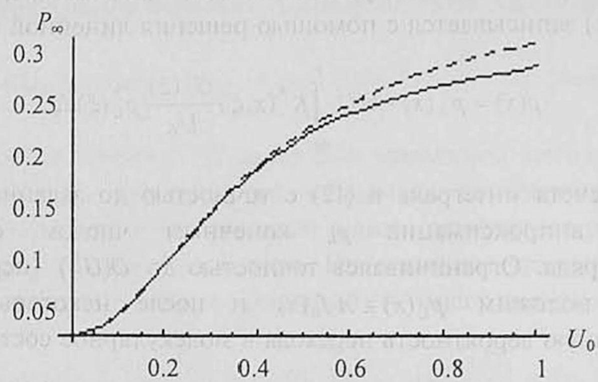

Рис.1. Конечная вероятность перехода при $\delta_2 = U_0$. Пунктирная линия – численное решение, сплошная линия – приближенная формула.

Разница в числовых множителях нелинейной поправки составляет $3\pi/8 - 4/\pi \approx 1.178 - 1.273 = 0.095 \approx 0.1$. Следует, однако, отметить, что эта разница ожидаемая, ибо она обусловлена разными степенями точности вычисления данных формул. При выводе (16) использовалось собственно решение p_L, в то время как выше мы применили замену $p_L(x) \cong A\, f_0(x)$ и определенную аппроксимацию для $g(x) = f_0(x) f_0(1-x)$.

Автор благодарен А.М.Ишханяну за большую помощь в ходе выполнения данной работы. Работа выполнена при поддержке грантов Фонда Гражданских Исследований и Разработок США № NFSAT PH 100-02 и PA № 0591-2002.

ЛИТЕРАТУРА

1. **L.D. Landau.** Phys. Z. Sowjetunion, **2**, 46 (1932); **C.Zener.** Proc. R. Soc. (London) A, **137**, 696 (1932).
2. **Н.Демков, М.Кунике.** Вестник ЛГУ, физ., хим., **16**, 39 (1969); **K.A.Suominen** and **B.M.Garraway**, Phys. Rev. A, **45**, 374 (1992).
3. **J.Javanainen and M.Mackie.** Phys. Rev. A, **59**, R3186 (1999); **M.Koštrun, M.Mackie, R.Cote,** and **J.Javanainen.** Phys. Rev. A, **62**, 063616 (2000).
4. **M.H.Anderson** et al. Science, **269**, 198 (1995); **K.B.Davis** et al. Phys. Rev. Lett., **75**, 3969 (1995); **C.C.Bradley, C.A.Sackett,** et al., ibid, **75**, 1687 (1995).
5. **Y.R. Shen,** The Principles of Nonlinear Optics. Wiley, New York, 2002; **R.W.Boyd.** Nonlinear Optics. Boston, Academic Press, 1992.

6. **A.M.Ishkhanyan.** J. Phys. A, **33**, 5539 (2000); **A.M. Ishkhanyan.** Opt. Commun., **176**, 155 (2000).
7. **M.Abramowitz** and **I.A.Stegun.** Handbook of Mathematical Functions. Dover, New York, 1965; **A. Erdelyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, and F.G. Tricomi.** Higher Transcendental Functions. McGraw-Hill, New York, 1953.
8. **А.М.Ишханян, Г.П.Черников.** Изв. НАН Армении, Физика, **39**, 1 (2004). **A.M.Ishkhanyan, G.P.Chernikov,** and **J.Javanainen**, in Proc. of Conf. Laser Physics-2002, Ashtarak, 2003, p.55.
9. **F.G.Tricomi.** Integral Equations. New York, Dover Publications, 1985; **H.Brunner** and **P.J. van der Houwen.** The Numerical Solution of Volterra Equations. Amsterdam, North Holland, 1986; **R.K.Miller.** Nonlinear Volterra Integral Equations. New York, Benjamin, 1971.
10. **A.Ishkhanyan, M.Mackie, A.Carmichael, P.L.Gould,** and **J.Javanainen**. Phys. Rev. A, **69**, 043612 (2004); **А.М.Ишханян.** Доклады НАН Армении, **104**, 112 (2004).

ԴԵՄԿՈՎ–ԿՈՒՆԻԿԵԻ ԱՌԱՋԻՆ ՄՈԴԵԼԸ ՍԱՌՆ ԱՏՈՄՆԵՐԻ ՖՈՏՈԱՍՈՑԻԱՑԻԱՅԻ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆՈՒՄ

Վ.Ռ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ

Ուսումնասիրված է ատոմական Բոզե–Էյնշտեյնյան կոնդենսատի լազերային ֆոտոասոցիացիայի պրոցեսում ռեզոնանսի անցման Դեմկով–Կունիկեի առաջին մոդելը: Վոլտերրայի ոչ-գծային ինտեգրալ հավասարման կիրառմամբ ստացված է մոլեկուլային վիճակի անցման վերջնական հավանականության անալիտիկ բանաձև թույլ փոխազդեցության սահմանի համար:

FIRST DEMKOV–KUNIKE MODEL IN THE THEORY OF PHOTOASSOCIATION OF COLD ATOMS

V.R. GHAZARYAN

The first Demkov–Kunike model of the resonance passage in a process of laser photoassociation of an atomic Bose–Einstein condensate is studied. Using a nonlinear Volterra integral equation, an analytic formula for the final probability of the transition into the molecular state is obtained for the weak interaction limit.