Известия НАН Армении, Физика, т.40, №1, с.3-9 (2005)

УДК 539.12

ДИФРАКЦИОННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ БЫСТРЫХ ЧАСТИЦ ПРИ ПРОЛЕТЕ ЧЕРЕЗ ЩЕЛЬ И КРУГЛОЕ ОТВЕРСТИЕ

М.Г. ПОГОСЯН

Ереванский государственный университет

(Поступила в редакцию 7 июля 2004 г.)

На основе принципа Гюйгенса исследовано дифракционное излучение равномерно и прямолинейно движущейся быстрой точечной заряженной частицы при пролете под произвольным углом через щель и круглое отверстие в плоском, бесконечно тонком и идеально проводящем экране.

1. Введение

Заряженная частица, пролетая мимо неоднородности, благодаря своему полю создает в этой неоднородности переменные токи (или переменную поляризацию), и неоднородность становится источником излучения, которое называют дифракционным (см., например, [1]). Поле дифракционного излучения равномерно движущейся, быстрой, точечной заряженной частицы при пролете под произвольным углом через отверстие произвольной формы в плоском, бесконечно тонком и идеально проводящем экране было вычислено в работе [2] по принципу Гюйгенса, в приближении Кирхгофа. Результаты при малых углах излучения и частных геометриях совпадают с результатами работ [3,4], полученными точным методом Винера–Хопфа для дифракционного излучения при пролете частицы мимо идеально проводящего и полубесконечного экрана в двух частных случаях. При перпендикулярном же пролете через отверстие произвольной формы они совпадают с результатами работ [5-7]. В работе [2] для фурье-образа по времени поля излучения в достаточно удаленных точках наблюдения $\mathbf{R}$ (в волновой зоне, при $kR>>1$) получена следующая формула:

$$\mathbf{E}_\tau(\mathbf{R},\omega)=\pm\frac{ik_z}{2\pi}\frac{e^{ik\rho}}{R}\int_{sc}\mathbf{E}^e_\tau(\mathbf{r},\omega)e^{-i\mathbf{k}\rho}dS,\quad \mathrm{E}_z=-\frac{(\mathbf{kE}_\tau)}{k_z},\tag{1}$$

где

$$\mathbf{E}^e(\mathbf{r},\omega)=\frac{ie}{2\pi^2}\int_{sc}\left[\frac{\omega\,\mathbf{v}}{c^2}-\mathbf{q}\right]\frac{\delta(\omega-\mathbf{qv})}{q^2-\omega^2/c^2}e^{i\mathbf{qr}}d\mathbf{q}\tag{2}$$

есть поле частицы с зарядом e, движущейся в пустоте равномерно и прямолинейно со скоростью $\mathbf{v}$, а ω и $\mathbf{q}$ – частота и волновой вектор псевдофотонов. Координатная система выбрана таким образом, что начало координат находится где-нибудь внутри отверстия, а экран находится в плоскости xoy, $\boldsymbol{\tau}$ – единичный вектор в этой плоскости. Знак плюс в (1) соответствует излучению вперед, а знак минус – назад. Непосредственной подстановкой (2) в (1) для поля излучения получаем:

$$\mathbf{E}_\tau(\mathbf{R},\omega) = \pm \frac{iek_z\omega}{2\pi^2\gamma v^3}\frac{e^{ikR}}{R}\int\limits_{sc}\frac{\boldsymbol{\rho}\mathbf{v}^2-(\boldsymbol{\rho}\mathbf{v})\mathbf{v}_\tau}{\left|[\mathbf{v}\boldsymbol{\rho}]\right|}K_1\left(\frac{\omega\left|[\mathbf{v}\boldsymbol{\rho}]\right|}{\gamma v^2}\right)e^{i\left(\frac{\omega}{v^2}\mathbf{v}-\mathbf{k}\right)\boldsymbol{\rho}}dS, \tag{3.1}$$

$$\mathrm{E}_z(\mathbf{R},\omega) = \mp \frac{ie\omega}{2\pi^2\gamma v^3}\frac{e^{ikR}}{R}\int\limits_{sc}\frac{\mathbf{k}\left(\boldsymbol{\rho}\mathbf{v}^2-(\boldsymbol{\rho}\mathbf{v})\mathbf{v}_\tau\right)}{\left|[\mathbf{v}\boldsymbol{\rho}]\right|}K_1\left(\frac{\omega\left|[\mathbf{v}\boldsymbol{\rho}]\right|}{\gamma v^2}\right)e^{i\left(\frac{\omega}{v^2}\mathbf{v}-\mathbf{k}\right)\boldsymbol{\rho}}dS, \tag{3.2}$$

где K_1 – функция Ганкеля от мнимого аргумента.

В последнее время в литературе появились работы (см. [8-14]), в которых с помощью дифракционного излучения изучались две проблемы. Первая из них – интенсивное излучение от периодично расположенных, параллельных полуплоскостей (так называемое когерентное или резонансное дифракционное излучение) в диапазоне от миллиметровых до ультрафиолетовых и рентгеновских длин волн. Вторая проблема касается диагностики пучков заряженных частиц. Но в обоих случаях надо иметь в виду такие факторы, как размер пучка, угловое распределение частиц, монохроматичность и т.д. Поэтому требуется знать свойства дифракционного излучения в общем случае произвольного угла пролета и произвольной формы отверстия.

В настоящей работе изучено дифракционное излучение равномерно движущейся, быстрой, точечной заряженной частицы при пролете через щель и круглое отверстие в плоском, бесконечно тонком и идеально проводящем экране.

2. Дифракционное излучение равномерно движущейся, точечной заряженной частицы при пролете под произвольным углом через щель в плоском, бесконечно тонком и идеально проводящем экране

Пусть заряженная частица пролетает через щель шириной a в идеально проводящем бесконечном экране. Выберем начало координат в точке пересечения траектории частицы с плоскостью щели, а ось x направим параллельно ее краям. Полярные углы будем отсчитывать от оси x, а азимутальные – от оси y, как показано на рис.1. Расстояние от начала координат до краев щели обозначим через a_1 и a_2 $(a_1 + a_2 = a)$. Подставляя (2) в (1), получим для поля излучения:

$$\mathbf{E}_\tau = \mp \frac{ek_z \sin\vartheta}{2\pi^2\omega\Gamma_0\sin\phi}\frac{e^{ikR}}{R}\left\{\mathbf{Q}\frac{e^{-qa_1}}{q} + \mathbf{Q}^*\frac{e^{-q^* a_1}}{q^*}\right\}, \tag{4.1}$$

$$E_z = \pm \frac{e\sin\vartheta}{2\pi^2 \omega \Gamma_0 \sin\phi}\frac{e^{ikR}}{R}\left\{ (\mathbf{kQ})\frac{e^{-qa_1}}{q} + (\mathbf{kQ}^*)\frac{e^{-q^* a_1}}{q^*} \right\}, \qquad (4.2)$$

где введены следующие обозначения:

$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{\omega\beta_x}{c} - k_x,\ \frac{\omega\beta_y}{c} - b - i\frac{\omega\sin\vartheta}{\mathrm{v}\sin\phi}\Gamma_0,\ 0 \right\},\quad q = \frac{\omega\sin\vartheta}{\mathrm{v}\sin\phi}\Gamma_0 + i(k_y - b)\ ,\quad \beta = \frac{\mathrm{v}}{\mathrm{c}},$$

$$b = \frac{\omega\cos\vartheta}{\mathrm{v}\sin\phi}(1 - \beta\cos\phi\cos\psi),\quad \Gamma_0 = \sqrt{(1 - \beta\cos\phi\cos\psi)^2 - \beta^2\sin^2\phi\sin^2\psi}\ .$$

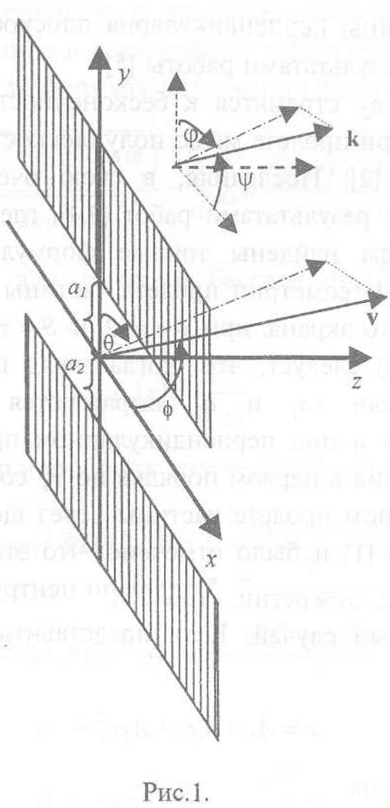

Рис.1.

Для энергии излучения отсюда получаем

$$\frac{d\varepsilon_\omega}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2\Gamma_1\cos^2\psi\cos^2\chi}{4\pi^2 c\Gamma_0\sin^2\vartheta}\times$$
$$\times\left[e^{-\Gamma_4 a_1} + e^{-\Gamma_4 a_2} + 2e^{-\Gamma_4 a}\left\{\Gamma_2\cos\left(2\chi + (b - k_y)a\right) + \Gamma_3\sin\left(2\chi + (b - k_y)a\right)\right\}\right], \qquad (5)$$

где

$$\Gamma_4 = 2\frac{\omega\sin\vartheta}{\mathrm{v}\sin\phi}\Gamma_0,\ \Gamma_2 = 1 - \frac{2}{\Gamma_1}(\Gamma_0\sin\psi\sin\vartheta)^2,\ \mathrm{tg}\chi = \frac{(1 - \beta_x\cos\psi)\cos\vartheta - \beta\sin\phi\sin\psi\cos\varphi}{\Gamma_0\sin\vartheta},$$

$$\Gamma_1=\left(\frac{\beta\sin\phi\cos\psi}{\sin\vartheta}\right)^2\left[\left(1-\frac{\beta_x}{\cos\psi}\right)^2\sin^2\varphi+\right.$$

$$\left.+\left(\left(\beta_x-\cos\psi\right)\left(\cos\varphi-\cos\vartheta\frac{\operatorname{tg}\psi}{\operatorname{tg}\phi}\right)-\frac{\operatorname{tg}\psi\cos\vartheta}{\gamma^2\beta\sin\phi}\right)^2+\left(\frac{\operatorname{tg}\psi\Gamma_4}{k}\right)^2\right].$$

$$\Gamma_3=\frac{\sqrt{2}\sin(\varphi-\pi/4)\sin 2\vartheta\sin\varphi\Gamma_0}{\Gamma_1}\left[\gamma^{-2}+\left(\beta_x-\cos\psi\right)\left(\beta_x+\frac{\sin\phi\operatorname{ctg}\psi}{\sqrt{2}\sin\left(\varphi-\pi/4\right)\cos\vartheta}\right)\right].$$

Если траектория частицы перпендикулярна плоскости щели $(\vartheta=\phi=\pi/2)$, то (4) и (5) совпадают с результатами работы [5].

Когда a_1 или a_2 стремятся к бесконечности, то задача сводится к задаче об излучении при пролете мимо полуплоскости и (4) и (5) совпадают с результатами работы [2]. Последняя, в свою очередь, при малых углах излучения совпадает с результатами работ [3,4], где, как уже было сказано, методом Винера–Хопфа найдены точные формулы для дифракционного излучения при частной геометрии пролета частицы мимо полубесконечного и идеально проводящего экрана: при $\phi=\pi/2$ и $\vartheta=\pi/2$, соответственно.

Из формулы (5) следует, что, когда заряд пролетает на расстоянии $r_0\neq 0$ от центра щели (a_1 и a_2 выражаются через r_0 посредством $a_{1,2}=(a/2)\pm r_0$), то, как и при перпендикулярном пролете [1,5], энергия дифракционного излучения в первом порядке по r_0 совпадает с энергией излучения при симметричном пролете частицы через щель $(r_0=0)$. На это было обращено внимание в [1] и было отмечено, что этот факт является общим для всех симметричных отверстий. Пролет по центру симметрии представляет собой экстремальный случай. Если представить излученную энергию в виде ряда по r_0:

$$\varepsilon=A_0+A_1r_0+A_2r_0^2+\ldots,$$

то из условия экстремума

$$\left.\frac{d\varepsilon}{dr_0}\right|_{r_0=0}=0$$

следует, что $A_1=0$.

Имея в виду вышесказанное и то, что при пролете заряда под углом к нормали экрана равноудаленные от траектории участки поля доходят до экрана в разные моменты времени, следует, что угловой наклон более существенен, чем отклонение от центра симметрии (малые поправки высокого порядка по r_0 в энергии). Этот факт мы будем использовать при расчете дифракционного излучения, когда заряд пролетает через круглое отверстие.

3. Дифракционное излучение равномерно движущейся, точечной заряженной частицы при пролете через круглое отверстие в плоском, бесконечно тонком и идеально проводящем экране

Пусть теперь частица пролетает через круглое отверстие с радиусом a в идеально проводящем бесконечном экране. Выберем начало координат в центре окружности. Полярные углы будем отсчитывать от оси z, а азимутальные – от оси x, как показано на рис.2. При общей геометрии задачи (при пролете через произвольную точку отверстия под произвольным углом) выражения для поля и энергии излучения весьма громоздки, поэтому будем рассматривать случай, когда частица пролетает через центр отверстия (имея в виду утверждение, сделанное в параграфе 2) и угол отклонения от оси z мал ($\vartheta << 1$). Тогда, имея в виду формулу разложения функции Ганкеля

$$\frac{K_1\left(\alpha\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\varphi}\right)}{\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\varphi}}=\frac{2}{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}n\frac{I_n(\alpha x)}{x}\frac{K_n(\alpha y)}{y}\frac{\sin(n\varphi)}{\sin\varphi} \tag{6}$$

при $x<y$ и выражение для функции Бесселя от мнимого аргумента при малых x

$$I_n(x)\approx\frac{x^n}{2^n n!},$$

для тангенциальных компонент поля излучения из (3) получим:

$$E_x=\mp\left[\left(1-\sin^2\vartheta\cos^2\varphi\right)\sin\lambda-\frac{\sin^2\vartheta\sin2\varphi}{2}\cos\lambda\right]B, \tag{7.1}$$

$$E_y=\mp\left[\left(1-\sin^2\vartheta\sin^2\varphi\right)\cos\lambda-\frac{\sin^2\vartheta\sin2\varphi}{2}\sin\lambda\right]B, \tag{7.2}$$

где

$$B=\frac{ek_z a}{\pi\gamma^2\mathrm{v}\cos^2\vartheta/2}\frac{e^{ikR}}{R}\times$$

$$\times\frac{\cos^2\vartheta/2\,J_1\left(\frac{\omega b}{\mathrm{v}}a\right)K_2\left(\frac{\omega\cos^2\vartheta/2}{\gamma\mathrm{v}}a\right)-b\gamma J_2\left(\frac{\omega b}{\mathrm{v}}a\right)K_1\left(\frac{\omega\cos^2\vartheta/2}{\gamma\mathrm{v}}a\right)}{b^2+\left(\frac{\cos^2\vartheta/2}{\gamma}\right)^2},$$

$$b=\sqrt{\sin^2\vartheta+\beta^2\sin^2\psi-2\beta\sin\vartheta\sin\psi\cos(\varphi-\phi)},$$

$$\mathrm{tg}\lambda=\frac{\sin\vartheta\cos\varphi-\beta\sin\psi\cos\phi}{\sin\vartheta\sin\varphi-\beta\sin\psi\sin\phi},\qquad\beta=\frac{\mathrm{v}}{c}.$$

При получении формул (7.1) и (7.2) мы воспользовались также следующими соотношениями для цилиндрических функций:

$$e^{iz\sin\varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)\, e^{in\varphi},$$

$$\int_a^{\infty} xJ_1(bx)K_1(cx)dx = \frac{a}{b^2+c^2}\left\{cJ_1(ba)K_2(ca) - bJ_2(ba)K_1(ca)\right\}.$$

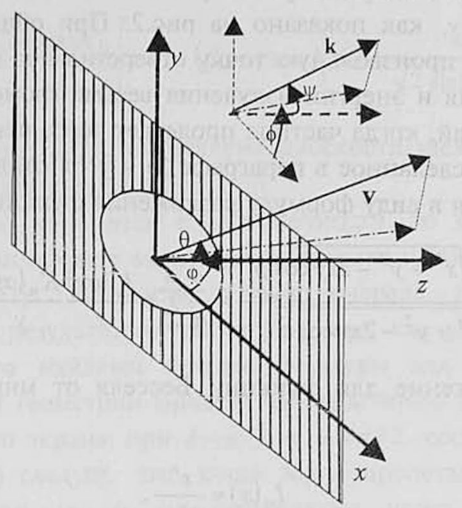

Рис.2.

При больших скоростях $(\omega a/\gamma v \ll 1)$, когда, вообще говоря, справедливо приближение Гюйгенса $(\mathrm{v} \approx c)$, имея в виду выражение функции Ганкеля $K_n(x)$ при малых x

$$K_n(x) \approx \frac{(n-1)!}{2}\left(\frac{2}{x}\right)^n,$$

и рекуррентное соотношение для функций Бесселя

$$J_0(x) + J_2(x) = \frac{2}{x} J_1(x),$$

для тангенциальных компонент поля излучения из (7) получим:

$$E_x = \mp \frac{ek_z}{\pi\gamma\omega\cos^4\vartheta/2}\frac{e^{ikR}}{R}\frac{\left(1-\sin^2\vartheta\cos^2\varphi\right)\sin\lambda - \dfrac{\sin^2\vartheta\sin 2\varphi}{2}\cos\lambda}{b^2+\left(\dfrac{\cos^2\vartheta/2}{\gamma}\right)^2} J_0\!\left(\frac{\omega b}{\mathrm{v}}a\right), \qquad (8.1)$$

$$E_y = \mp \frac{ek_z}{\pi\gamma\omega\cos^4\vartheta/2}\frac{e^{ikR}}{R}\frac{\left(1-\sin^2\vartheta\sin^2\varphi\right)\cos\lambda - \dfrac{\sin^2\vartheta\sin 2\varphi}{2}\sin\lambda}{b^2+\left(\dfrac{\cos^2\vartheta/2}{\gamma}\right)^2} J_0\!\left(\frac{\omega b}{\mathrm{v}}a\right). \qquad (8.2)$$

Третью же компоненту $\mathbf{E}(\mathbf{r},\omega)$ найдем из условия поперечности поля излучения:

$$E_z = -\frac{(\mathbf{kE}_\tau)}{k_z}. \tag{8.3}$$

Для энергии излучения, определяемого полями (8), получим:

$$\frac{d\varepsilon_\omega}{d\omega d\Omega} = \left(\frac{e\gamma\cos\psi}{\pi\cos^4\vartheta/2}\right)^2 \frac{\cos^2(\varphi+\lambda)+\dfrac{\cos 2\vartheta}{\cos^2\psi}\sin^2(\varphi+\lambda)+\mathrm{tg}^2\psi\sin^2\vartheta\sin^2(\varphi-\phi)}{c\left((\gamma b)^2+\cos^4\vartheta/2\right)^2} J_0^2\left(\frac{\omega b}{\mathrm{v}}a\right). \tag{9}$$

При перпендикулярном пролете через отверстие $(\vartheta = 0)$ выражения (7),(8) и (9) совпадают с результатами, полученными в [6], которые, в свою очередь, при малых углах излучения совпадают с результатами работы [7], в которой точным методом Винера–Хопфа рассчитано дифракционное излучение при перпендикулярном пролете через круглое отверстие на бесконечном и идеально проводящем экране.

Выражаю благодарность Г.К.Аветисяну за обсуждение результатов и постоянный интерес к работе.

Работа финансировалась грантом NFSAT PH 082-02/CRDF 12023.

ЛИТЕРАТУРА

1. **М.Л. Тер-Микаелян**. Влияние среды на электромагнитные процессы при высоких энергиях. Ереван, изд. АН Арм.ССР, 1969.
2. **М.Г.Погосян**. Изв. НАН Армении, Физика, **39**, 288 (2004).
3. **А.П.Казанцев, Г.И. Сурдутович**. ДАН СССР, **147**, 74 (1962).
4. **Д.М.Седракян**. Изв. АН Арм.ССР (серия физ.-мат. наук), **17**, 103 (1964).
5. **М.Л.Тер-Микаелян, Б.В. Хачатрян**. ДАН Арм.ССР, **40**, 13 (1965).
6. **Б.В.Хачатрян**. Изв. АН Арм.ССР (серия физ.-мат. наук), **18**, 133 (1965).
7. **Ю.Н.Днестренский, Д.П. Костомаров**. ДАН СССР, **124**, 1026 (1959).
8. **M.J.Moran, B.Chang**. Nucl. Instr. and Meth. B, **40/41**, 970 (1989).
9. **M.Castellano**. Nucl. Instr. and Meth. A, **394**, 275 (1997).
10. **D.W.Rule, R.B.Fiorito, W.D.Kimura**. AIP Conference Proceedings, **390**, 510 (1997).
11. **R.B.Fiorito, D.W. Rule**. Nucl. Instr. and Meth. B, **173**, 67 (2001).
12. **A.P.Potylitsyn, N.A. Potylitsyn**. Preprint, lanl.arXiv physics/0002034 (2000).
13. **Y.Shibata** et al. Phys. Rev. E, **52**, 6787 (1995).
14. **B.Feig** el al. Nucl. Instr. and Meth. A, **475**, 492 (2001).

DIFFRACTION RADIATION OF FAST PARTICLES PASSING THROUGH A SLIT AND CIRCULAR APERTURE

M.G. POGHOSYAN

Based on the Huygens approach the diffraction radiation of a fast particle passing at an arbitrary angle through a slit and a circular aperture in an ideally conducting screen is studied.