Известия НАН Армении, Физика, т.39, №5, с.293-300 (2004)

УДК 621.384

СВЯЗАННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ЭЛЕКТРОНОВ В СИЛЬНОТОЧНЫХ НАКОПИТЕЛЯХ

Д.К. КАЛАНТАРЯН[1,2], Ю.Л. МАРТИРОСЯН[1]

[1]Центр синхротронного излучения CANDLE

[2]Ереванский государственый университет

(Поступила в редакцию 13 августа 2003 г.)

Исследовано влияние пространственного заряда на динамику электронного пучка в накопительном кольце. Разработана методика расчета смещения числа бетатронных колебаний в случае нормально ориентированного пучка и наличия связи горизонтальных и вертикальных колебаний. Показано, что при наличии связи поперечных колебаний близость к разностному резонансу существенно ограничивает предельный ток в кольце. Результаты исследований применены для оценки предельного тока пучка в накопителе CANDLE и диагностики нестабильности пучка.

1. Введение

Получение интенсивных электронных пучков большой яркости в источниках синхротронного излучения (СИ) третьего поколения требует обеспечения малых эмиттансов пучка и большого циркулирующего тока в кольце. Увеличение плотности частиц в единице фазового объема поперечных колебаний частиц в свою очередь приводит к усилению коллективных эффектов, среди которых важное место занимают эффекты взаимодействия частиц с собственными полями пространственного заряда пучка.

В настоящей работе исследовано смещение числа бетатронных колебаний в накопителе электронов, вызванных силами пространственного заряда. Разработана методика линейного матричного формализма, которая применена для оценки этих эффектов в накопителе электронов источника СИ CANDLE. Для учета связи поперечных колебаний анализ проведен в четырехмерном фазовом пространстве, что позволяет замкнуть область устойчивости поперечных колебаний частиц в пучке и детектировать возможные потери.

2. Уравнения движения

Как известно [1], лагранжиан заряженной частицы с импульсом p и зарядом e в магнитном поле с векторным потенциалом $\mathbf{A}(x,y,s)$ имеет вид

$$L = \left|\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right| + \frac{e}{p}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{ds}\cdot\mathbf{A}\,. \qquad (1)$$

В натуральной системе координат (x, y, s), связанной с идеальной орбитой в накопителе (рис.1), уравнения траектории частицы в фазовом пространстве (x, p_x, y, p_y) принимают вид

$$\frac{dx}{ds} = \frac{1 - h_0\cdot x}{\sqrt{1 - p_x^2 - p_y^2}}\cdot p_x\,, \quad \frac{dy}{ds} = \frac{1 - h_0\cdot x}{\sqrt{1 - p_x^2 - p_y^2}}\cdot p_y \qquad (2)$$

$$\frac{dp_x}{ds} = -h_0\sqrt{1 - p_x^2 - p_y^2} + \frac{e}{p}(1 - h_0\cdot x)\left\{\frac{p_y}{\sqrt{1 - p_x^2 - p_y^2}}B_s - B_y\right\} + \frac{1}{p\cdot v}\frac{1 - h_0\cdot x}{\sqrt{1 - p_x^2 - p_y^2}}F_{x,s}\,,$$

$$\frac{dp_y}{ds} = \frac{e}{p}\cdot(1 - h_0\cdot x)\cdot\left\{B_x - \frac{p_x}{\sqrt{1 - p_x^2 - p_y^2}}\cdot B_s\right\} + \frac{1}{p\cdot v}\cdot\frac{1 - h_0\cdot x}{\sqrt{1 - p_x^2 - p_y^2}}\cdot F_{y,s}\,,$$

где p_x, p_y – сопряженные импульсы, $h_0(s) = -(e/p)\cdot B_y(0,0,s)$ – кривизна траектории в поворотных магнитах, s – продольная координата вдоль идеальной замкнутой орбиты. Последние члены в правых частях двух последних уравнений представляют собой отталкивающие силы, обусловленные пространственным зарядом пучка.

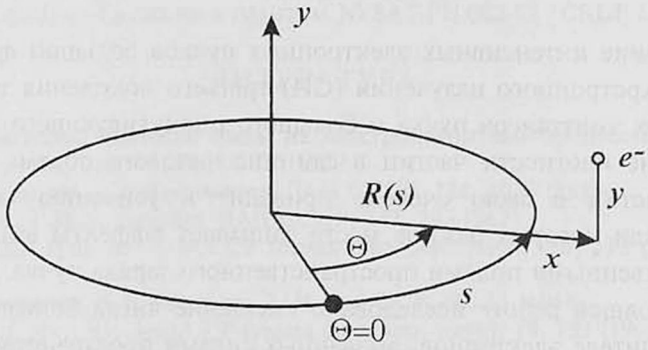

Рис.1. Натуральная система координат.

Систему уравнений (2) мы будем решать в линейном приближении, включая в уравнения движения только поперечные магнитные поля и пренебрегая эффектами краевых магнитных полей. Так как в общем случае эти уравнения связаны, то мы будем использовать четырехмерную матричную теорию динамики частиц в ускорителях. Однако для дальнейшего продвижения вперед, наряду с хорошо известными внешними силами от поворотных и квадрупольных магнитов, нам понадобятся также явные выражения для сил, вызванных пространственным зарядом пучка. Этому посвящен следующий раздел статьи.

3. Силы пространственного заряда пучка

Для явного представления сил пространственного заряда пучка мы сделаем следующие предположения о распределении частиц в пучке. 1) Приближение непрерывного релятивистского протяженного пучка, т.е. продольный размер пучка во много раз больше, чем его поперечные размеры (для пучка CANDLE этот параметр равен 50). Таким образом учитываются только поперечные силы пространственного заряда и игнорируются продольные силы. 2) Электронный пучок имеет эллиптическое поперечное сечение, внутри которого частицы имеют однородное распределение по двум координатным осям (в таком пучке силы меняются линейно от поперечных координат). 3) Допускается приближение монохроматичности пучка и пренебрегается малым разбросом (порядка 10^{-3}) частиц по по импульсам внутри пучка.

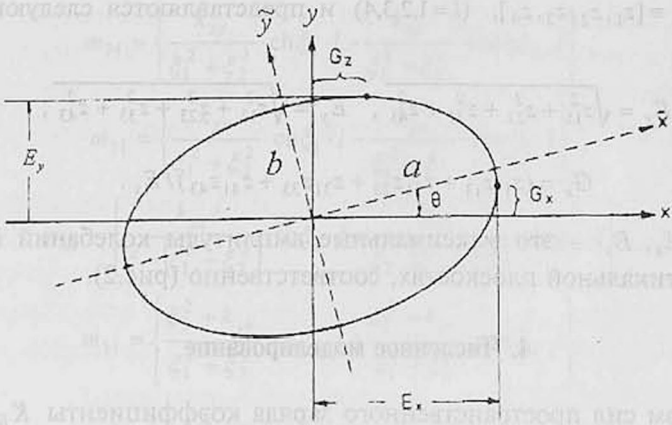

Рис.2. Поперечное сечение пучка с наклонным эллипсом.

С учетом этих предположений, силы пространственного заряда можно представить в виде [2]

$$F_{x,s} = \frac{e \cdot \lambda}{\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \gamma^2} \cdot \left(F_{xx} \cdot x + F_{xy} \cdot y\right), \quad F_{y,s} = \frac{e \cdot \lambda}{\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \gamma^2} \cdot \left(F_{yx} \cdot x + F_{yy} \cdot y\right), \tag{3}$$

где

$$F_{xy} = F_{yx} = \frac{1}{a+b} \cdot \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \cdot \sin\Theta \cdot \cos\Theta, \tag{4}$$

$$F_{xx} = \frac{1}{a+b} \cdot \left(\frac{1}{a} \cdot \cos^2\Theta + \frac{1}{b} \cdot \sin^2\Theta\right); \quad F_{yy} = \frac{1}{a+b} \cdot \left(\frac{1}{a} \cdot \sin^2\Theta + \frac{1}{b} \cdot \cos^2\Theta\right).$$

Здесь λ – линейная плотность заряда, а смысл остальных параметров показан на рис.2. Как показано в [3], зависимость уравнений огибающих траекторий от типа распределения (гауссовское или равномерное) частиц внутри пучка несущественна. Поэтому в наших дальнейших расчетах мы будем пред-

полагать равномерное распределение частиц внутри пучка.

Как видно из (4), при нормальной ориентации пучка ($\Theta = 0$), когда оси эллипса совпадают с осями поперечных координат и/или для пучка с круглым поперечым сечением члены, характеризующие связь поперечных колебаний, исчезают, уравнения движения частиц становятся независимыми.

Величина угла наклона эллипса поперечного сечения пучка в точке s вдоль орбиты определяется из характеристических параметров эллипса по формуле

$$\tan 2\Theta = \frac{2E_x G_x}{E_x^2 - E_y^2}, \tag{5}$$

где характеристические параметры эллипса E_x, E_y, G_x в свою очередь определяются вектором состояния частицы в заданной точке орбиты $z_i = [x, x', y, y']_i \equiv [z_1, z_2, z_3, z_4]_i$ $(i = 1,2,3,4)$ и представляются следующим образом:

$$E_x = \sqrt{z_{11}^2 + z_{21}^2 + z_{31}^2 + z_{41}^2}, \quad E_y = \sqrt{z_{13}^2 + z_{23}^2 + z_{33}^2 + z_{43}^2}, \tag{6}$$

$$G_x = (z_{11}z_{13} + z_{21}z_{23} + z_{31}z_{33} + z_{41}z_{43}) / E_x .$$

В частности, E_x, E_y – это максимальные амплитуды колебаний в горизонтальной и вертикальной плоскостях, соответственно (рис.2).

4. Численное моделирование

С учетом сил пространственного заряда коэффициенты K_E в уравнениях движения, характеризуюшие фокусируюшие свойства магнитов, можно представить в виде

$$K_E = k_E - k_s, \tag{7}$$

где k_E и k_s – фокусируюшие параметры для внешних и собственных полей, соответственно. Такая замена позволяет получить четырехмерные матрицы перехода для всех типов магнитов и свободного промежутка. В частности, явный вид элементов матрицы перехода фокусирующего квадруполя с длиной l имеет вид

$$M_{FQ} = [m_{ij}], \qquad i, j = 1...4, \tag{8}$$

$$m_{11} = \left\{ \frac{\xi_2^2 - k_{xx}}{\xi_1^2 + \xi_2^2} \cdot \mathrm{ch}\xi_1 \cdot l + \frac{\xi_1^2 + k_{xx}}{\xi_1^2 + \xi_2^2} \cdot \cos\xi_2 \cdot l \right\},$$

$$m_{12} = \left\{ \frac{\xi_2^2 - k_{xx}}{\xi_1 \cdot \left(\xi_1^2 + \xi_2^2\right)} \cdot \mathrm{sh}\xi_1 \cdot l + \frac{\xi_1^2 + k_{xx}}{\xi_2 \cdot \left(\xi_1^2 + \xi_2^2\right)} \cdot \sin\xi_2 \cdot l \right\},$$

$$m_{13}=\left\{\frac{k_{xy}}{\xi_1^2+\xi_2^2}\cdot \mathrm{ch}\xi_1\cdot l-\frac{k_{xy}}{\xi_1^2+\xi_2^2}\cdot\cos\xi_2\cdot l\right\},$$

$$m_{14}=\left\{\frac{k_{xy}}{\xi_1\cdot\left(\xi_1^2+\xi_2^2\right)}\cdot \mathrm{sh}\xi_1\cdot l-\frac{k_{xy}}{\xi_2\cdot\left(\xi_1^2+\xi_2^2\right)}\cdot\sin\xi_2\cdot l\right\},$$

$$m_{21}=\left\{\xi_1\cdot\frac{\xi_2^2-k_{xx}}{\xi_1^2+\xi_2^2}\cdot \mathrm{sh}\xi_1\cdot l-\xi_2\frac{\xi_1^2+k_{xx}}{\xi_1^2+\xi_2^2}\cdot\sin\xi_2\cdot l\right\},$$

$$m_{22}=\left\{\frac{\xi_2^2-k_{xx}}{\xi_1^2+\xi_2^2}\cdot \mathrm{ch}\xi_1\cdot l+\frac{\xi_1^2+k_{xx}}{\xi_1^2+\xi_2^2}\cdot\cos\xi_2\cdot l\right\},$$

$$m_{23}=\left\{\xi_1\cdot\frac{k_{xy}}{\xi_1^2+\xi_2^2}\cdot \mathrm{sh}\xi_1\cdot l+\xi_2\cdot\frac{k_{xy}}{\xi_1^2+\xi_2^2}\cdot\sin\xi_2\cdot l\right\},$$

$$m_{24}=\left\{\frac{k_{xy}}{\xi_1^2+\xi_2^2}\cdot \mathrm{ch}\xi_1\cdot l-\frac{k_{xy}}{\xi_1^2+\xi_2^2}\cdot\cos s\xi_2\cdot l\right\}, \qquad (9)$$

$$m_{31}=\left\{\frac{k_{yx}}{\xi_1^2+\xi_2^2}\cdot \mathrm{ch}\xi_1\cdot l-\frac{k_{yx}}{\xi_1^2+\xi_2^2}\cdot\cos\xi_2\cdot l\right\},$$

$$m_{32}=\left\{\frac{k_{yx}}{\xi_1\cdot\left(\xi_1^2+\xi_2^2\right)}\cdot \mathrm{sh}\xi_1\cdot l-\frac{k_{yx}}{\xi_2\cdot\left(\xi_1^2+\xi_2^2\right)}\cdot\sin\xi_2\cdot l\right\},$$

$$m_{33}=\left\{\frac{\xi_2^2+k_{yy}}{\xi_1^2+\xi_2^2}\cdot \mathrm{ch}\xi_1\cdot l+\frac{\xi_1^2-k_{yy}}{\xi_1^2+\xi_2^2}\cdot\cos\xi_2\cdot l\right\},$$

$$m_{34}=\left\{\frac{\xi_2^2+k_{yy}}{\xi_1\cdot\left(\xi_1^2+\xi_2^2\right)}\cdot \mathrm{sh}\xi_1\cdot l+\frac{\xi_1^2-k_{yy}}{\xi_2\cdot\left(\xi_1^2+\xi_2^2\right)}\cdot\sin\xi_2\cdot l\right\},$$

$$m_{41}=\left\{\xi_1\cdot\frac{k_{yx}}{\xi_1^2+\xi_2^2}\cdot \mathrm{sh}\xi_1\cdot l+\xi_2\cdot\frac{k_{yx}}{\xi_1^2+\xi_2^2}\cdot\sin\xi_2\cdot l\right\},$$

$$m_{42}=\left\{\frac{k_{yx}}{\xi_1^2+\xi_2^2}\cdot \mathrm{ch}\xi_1\cdot l-\frac{k_{yx}}{\xi_1^2+\xi_2^2}\cdot\cos\xi_2\cdot l\right\},$$

$$m_{43}=\left\{\xi_1\cdot\frac{\xi_2^2+k_{yy}}{\xi_1^2+\xi_2^2}\cdot \mathrm{ch}\xi_1\cdot l-\xi_2\cdot\frac{\xi_1^2-k_{yy}}{\xi_1^2+\xi_2^2}\cdot\sin\xi_2\cdot l\right\},$$

$$m_{44}=\left\{\frac{\xi_2^2+k_{yy}}{\xi_1^2+\xi_2^2}\cdot \mathrm{ch}\xi_1\cdot l+\frac{\xi_1^2-k_{yy}}{\xi_1^2+\xi_2^2}\cdot\cos\xi_2\cdot l\right\},$$

где

$$\xi_{1,2}=\left(\frac{\sqrt{\left(k_{yy}-k_{xx}\right)^2+\left(k_{xx}\cdot k_{yy}+k_{xy}\cdot k_{yx}\right)}\pm\left(k_{yy}-k_{xx}\right)}{2}\right)^{1/2}, \qquad (10)$$

$$k_{xx} = k_F - A \cdot F_{xx}; \quad k_{yy} = k_F + A \cdot F_{yy}, \quad k_{xy} = -A \cdot F_{xy}; \quad k_{yx} = -A \cdot F_{yx},$$

$$A = \frac{\lambda \cdot r_e}{\gamma^3} \cdot f; \quad \lambda = \frac{N_b}{l_b}.$$

Здесь γ – Лоренц-фактор электрона, $r_e = 2.82 \cdot 10^{-15}$ м – классический радиус электрона, l_b – длина одного сгустка, N_b – число частиц в сгустке. Для остальных элементов магнитной системы матрицу перехода можно получить подходящей заменой обозначений.

Параметр f отражает влияние стенок вакуумной камеры и полюсных наконечников магнитов:

$$f = 1/\{1 + b(a+b)[E_1(1 + B \cdot \beta^2 \cdot \gamma^2)/h^2 + E_2(1 + C_m \cdot B \cdot \beta^2 \cdot \gamma^2)/g^2]\}, \qquad (11)$$

где a – большая (горизонтальная) полуось эллиптического пучка, b – малая (вертикальная) полуось эллиптического пучка, h – полувысота вакуумной камеры, g – полувысота зазора магнита, C_m – отношение суммарной длины магнитов к периметру кольца, B – коэффициент, учитывающий эффект группировки пучка [4]. Для параметров вакуумной камеры CANDLE B =0,012, $E_1 = 0.172$, $E_2 = 0{,}2$ и величина f = 0,48.

На примере накопительного кольца CANDLE было проведено численное моделирование эффектов пространственного заряда на базе MATLAB [5].

Накопительное кольцо CANDLE с периметром 216 м состоит из 16 идентичных суперпериодов [6], которые представляют собой ахроматичные ячейки типа Чесмана-Грина. Параметры магнитных элементов накопителя CANDLE приведены в табл.1.

Таблица 1. Параметры магнитных элементов накопителя CANDLE.

Магнит	Диполь	Квадруполь QF	Квадруполь QFC	Квадруполь QD
Длина, L (mm)	1450	380	500	160
Градиент, G (Тл/m)	3,3	16,5	17,0	12,9
Вписанный радиус, R (mm)	44	35	35	35

Ограничение на значение предельного тока в кольце 0.35А в основном связано с эффектом внутрипучкового рассеяния (эффект Тушека [7]), который определяет время жизни пучка равным 18,4 часа. Из-за нестабильности, связанной с концентрацией ионов остаточного газа в вакуумной камере, в накопителе CANDLE заполняются только 282 пучка из 360 возможных [6]. Это соответствует значению предельного числа частиц в одном сгустке N_b=0,56·10^{10}.

Как показывают численные результаты, ограничение на предельное число частиц в пучке сильно проявляется в случае наклонного в поперечном сечении пучка из-за разностного резонанса. Это хорошо видно на рис.3, где

приведен график зависимости частот вертикальных и горизонтальных бетатронных колебаний от числа частиц в пучке. Резонансному значению соответствует предельное число частиц в сгустке $N_b = 2.7 \cdot 10^{11}$. Причиной возбуждения разностного резонанса является близость дробных частей частот горизонтальных и вертикальных колебаний (13.22 и 4.26, соответственно), а также, как следует из (4), сильное влияние сил пространственного заряда на вертикальные колебания частиц (рис.3). Однако данное ограничение далеко от предельного расчетного числа частиц $0.56 \cdot 10^{10}$ и не представляет опасности для устойчивого движения пучка в ускорителе.

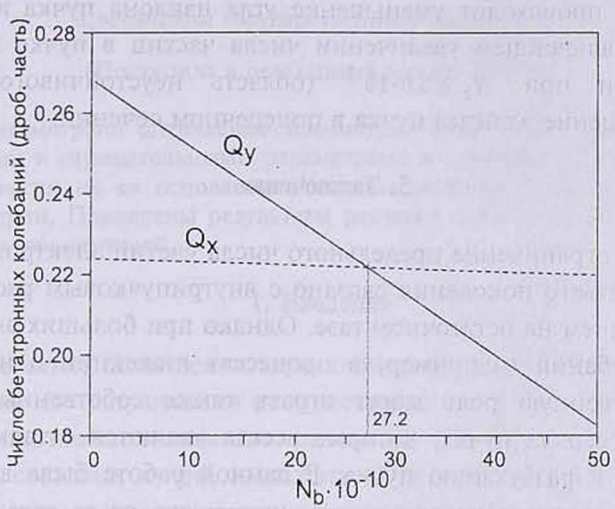

Рис.3. Зависимость горизонтальных и вертикальных чисел бетатронных колебаний от популяции частиц в пучке.

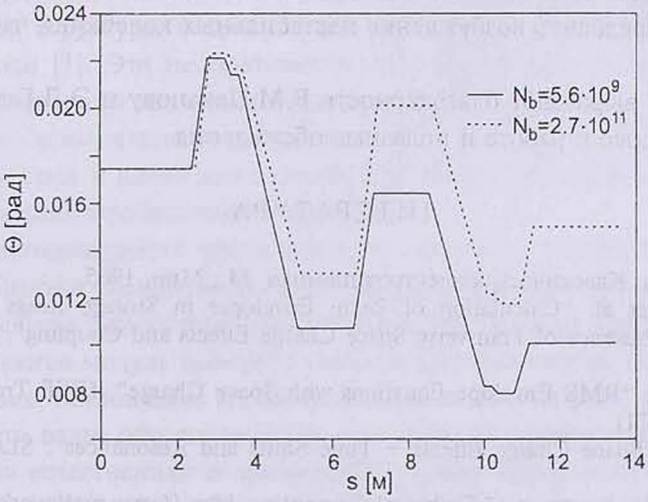

Рис.4. Зависимость угла наклона пучка от продольной координаты: а) при $N_b = 0.56 \cdot 10^{10}$, б) при $N_b = 2.7 \cdot 10^{10}$.

Академия наук Армянской ССР
Фундаментальная библиотека

На рис.4 показано изменение угла наклона поперечного эллипса пучка в зависимости от продольной координаты на входе/выходе каждого элемента магнитной структуры одного суперпериода для расчетных параметров пучка.

Для начального угла наклона пучка в поперечном сечении было выбрано значение 1 град, что приблизительно соответствует величине коэффициента связи один процент. На рисунке можно заметить колебания угла наклона с малой амплитудой порядка 0,005 рад после прохождения пучком квадрупольных магнитов. При расчетном значении частиц в пучке, как видно из рис.4, происходит уменьшение угла наклона пучка в поперечном сечении. При дальнейшем увеличении числа частиц в пучке угол наклона увеличивается и при $N_b \geq 5{,}6 \cdot 10^{11}$ (область неустойчивого движения), происходит вращение эллипса пучка в поперечном сечении.

5. Заключение

Обычно ограничение предельного числа частиц электронного пучка в накопителях третьего поколения связано с внутрипучковым рассеянием частиц или рассеянием на остаточном газе. Однако при больших амплитудах бетатронных колебаний (например, в процессах инжекции в накопительное кольцо) существенную роль могут играть также собственные силы пространственного заряда пучка, которые всегда являются отталкивающими и могут привести к разбуханию пучка. В данной работе была выявлена важность учета разностного резонанса, возникающего из-за связи поперечных колебаний, индуцируемой пространственным зарядом пучка. Результаты исследования и приведенная методика расчета позволяют оценить физические параметры пучка на входе и выходе отдельных элементов магнитной структуры и предопределить возбуждение нестабильных колебаний частиц в накопителе.

Авторы выражают благодарность В.М.Цаканову и Э.Д.Газазяну за постоянный интерес к работе и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Дж. Джексон.** Классическая электродинамика. М., Мир, 1965.
2. **I.Borchardt et al.** "Calculation of Beam Envelopes in Storage Rings and Transport Systems in Presence of Transverse Space Charge Effects and Coupling", DESY 87-161, 1987.
3. **F.J.Sacherer.** "RMS Envelope Equations with Space Charge". IEEE Trans. Nucl. Sci., **18,** 1105 (1971).
4. **W.T.Weng.** "Space Charge Effects – Tune Shifts and Resonances". SLAC-PUB-4058, 1986.
5. MATLAB. The Language of Technical Computing, http://www.mathworks.com.
6. **CANDLE**-Conceptual Design Report, Yerevan, 2002.
7. **A.Piwinski**. The Touschek effect in Strong Focusing Storage Rings. DESY 98-179, Nov. 1998, ISSN 0418-9833, 22 p.