

УДК 535.14

ГЕНЕРАЦИЯ СВЕТОВЫХ ПОЛЕЙ С ВЫСОКОЙ СТЕПЕНЬЮ КВАНТОВОЙ ПЕРЕПУТАННОСТИ

А.О. АДАМЯН¹, Г.Ю. КРЮЧКЯН²

¹Ереванский государственный университет

²Институт физических исследований НАН Армении

(Поступила в редакцию 22 апреля 2004 г.)

Показана возможность генерации состояний света с высокой степенью квантовой перепутанности в оптическом параметрическом генераторе (ОПГ) с модулированным по амплитуде полем накачки. Получены аналитические результаты для степени перепутанности в линейном приближении по квантовым флуктуациям для режимов ниже и выше порога генерации. Продемонстрировано существенное улучшение степени перепутанности для модулированного ОПГ по сравнению с обычным, если период модуляции сравним с характерным временем диссипации.

1. Введение

В настоящее время установлено, что использование перепутанных состояний квантовых систем с непрерывными переменными лежит в основе многих приложений в области квантовой информации [1,2]. Одной из важных задач в этом направлении является получение интенсивных световых пучков с высокой степенью квантовой перепутанности. Наиболее известным примером перепутанных состояний с непрерывными переменными являются двухмодовые сжатые состояния света.

Впервые такие состояния были предложены в [3], и с точки зрения хорошо известного парадокса Эйнштейна-Подольского-Розена (ЭПР) рассмотрены в [4]. Перепутанные состояния с непрерывными переменными реализованы экспериментально в [5], на основе невырожденного оптического параметрического усилителя, используя параметрическое преобразование в резонаторе моды накачки на две моды субгармоник с одинаковыми частотами и взаимно-ортогональными поляризациями.

Следует отметить, что в большинстве современных экспериментов перепутанные состояния оптических полей получаются в невырожденном оптическом параметрическом генераторе (НОПГ) в режиме генерации ниже порога. Их реализация в надпороговом режиме генерации сталкивается с достаточно серьезными трудностями. Некоторые экспериментальные результаты в этом направлении получены в работах [6]. С теоретической точки зре-

ния рассмотрение генерации перепутанных состояний света в около- и надпороговых режимах НОПГ проведено в [7]. Новая схема НОПГ для генерации перепутанных состояний поля излучения с фиксированными фазами разработана в [8].

В настоящей работе предложен новый подход получения перепутанных состояний интенсивного электромагнитного излучения на основе параметрических генераторов, в которых как поле накачки используется модулированное по амплитуде лазерное поле. Принципиальная важность и оригинальность предложенной ниже схемы связана со следующим обстоятельством. Как известно, степень квантовой перепутанности э.м. полей обычно исследуется с помощью дисперсий их квадратурных амплитуд. Для двух мод субгармоник НОПГ (с частотами $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3/2$, где ω_3 – частота моды накачки) с амплитудами a_1 и a_2 критерий квантовой перепутанности формулируется через разность $x_1 - x_2$ и сумму $y_1 + y_2$ квадратурных амплитуд:

$$\begin{aligned} x_k &= x_k(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_k^+ e^{-i\theta_k} + a_k e^{i\theta_k}), \\ y_k &= y_k(\theta) = y_k(\theta_k - \pi/2), \end{aligned} \quad (k=1,2) \quad (1)$$

и имеет следующий вид [9]:

$$V(x_1 - x_2) + V(y_1 + y_2) < 2, \quad (2)$$

где $V(x) = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$ обозначает дисперсию. Для обычного НОПГ в силу симметрии системы получаем $V = V(x_1 - x_2) = V(y_1 + y_2)$, вследствие чего условие (2) принимает вид $V < 1$. Как показано в [7], для НОПГ минимальное значение дисперсии равно $V = 1/2$ и достигается в области порога генерации. Отметим, что такое ограничение снизу имеет место только для интегральных дисперсий, но не для их спектров и объясняется диссипативными процессами, вследствие потерь в резонаторе. Как показано в настоящей работе, в предложенной схеме НОПГ, вследствие временной модуляции параметрической динамики, достигается более высокая степень сжатия уровня квантовых флуктуаций ниже вакуумного уровня, $V < 1/2$. На языке принципа неопределенности для квадратурных амплитуд это означает неравенство $V^2 < 1/4$, которое совпадает с условием так называемого сильного критерия ЭПР парадокса [4].

Работа построена следующим образом. В разделе 2 приводятся основные уравнения квантовой теории НОПГ в модулированном поле. Раздел 3 посвящен анализу квантовых эффектов поля излучения НОПГ в обоих режимах генерации. В разделе 4 приводятся основные результаты по квантовой перепутанности для генерируемых полей.

2. Параметрическая диссипативная динамика в условиях временной модуляции

Рассмотрим схему НОПГ с фазовым синхронизмом второго рода в

трехмодовом резонаторе, содержащем моду накачки на частоте ω_3 и две ортогонально-поляризованные моды субгармоник на частоте $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3/2$. Мода ω_3 возбуждается полем лазера E_L с несущей частотой $\omega_L \approx \omega_3$ и модулированной по времени амплитудой $E_L = \text{Re}[f(t)e^{-i(\omega_L t - \phi_L)}]$.

Такая схема может быть реализована по крайней мере для НОПГ под действием полихроматических полей с близкими частотами, в частности, бихроматического и трехчастотного полей. Гамильтониан взаимодействия мод в $\chi^{(2)}$ -нелинейной среде в резонансном приближении и в представлении взаимодействия имеет следующий вид:

$$H = i\hbar \left[f(t) e^{i(\phi_L - \omega_3 t)} a_3 - f^*(t) e^{-i(\phi_L - \omega_3 t)} a_3^+ \right] + i\hbar k \left(e^{i\phi_k} a_3 a_1^+ a_2^+ - e^{-i\phi_k} a_3^+ a_1 a_2 \right). \quad (3)$$

Здесь a_i ($i=1,2,3$) – операторы рождения и уничтожения мод, $f(t)$ – периодическая функция с модуляционной частотой $\delta \ll \omega_L$, постоянная $ke^{i\phi_k}$ определяет эффективность процесса деления частоты $\omega_3 \rightarrow \omega_3/2 + \omega_3/2$ в $\chi^{(2)}$ -среде.

Приведем выражения модуляционной амплитуды для различных конфигураций НОПГ. Для случая бихроматического поля возбуждения в форме

$$E_{1ext} = \text{Re} \left(f_1 e^{-i(\omega_L + \delta)t} + f_2 e^{-i(\omega_L - \delta)t + i\phi} \right) \quad (4)$$

гамильтониан взаимодействия в резонансном приближении имеет вид (3) с $f(t) = f_1 + f_2 e^{i(\delta t + \phi)}$, в то время как для трехчастотного поля возбуждения

$$E_{2ext} = f_1 \cos(\omega_L + \phi_L) + \frac{f_2}{2} \cos[(\omega_L + \delta)t + \phi_L + \phi] + \frac{f_2}{2} \cos[(\omega_L - \delta)t + \phi_L - \phi] \quad (5)$$

модуляционная амплитуда равна $f(t) = f_1 + f_2 \cos(\delta t + \phi_L)$.

Рассматриваемая система диссипативна из-за квантовых флуктуаций и потерь мод в резонаторе. Постоянные затухания мод γ_i ($i=1,2,3$) учитываются в рамках уравнения для матрицы плотности в случае $\gamma_3 \gg \gamma$, где $\gamma = \gamma_1 = \gamma_2$. В этом случае мода ω_3 адиабатически исключается, однако эффекты ее истощения в работе учитываются точно.

Дальнейшее рассмотрение системы проводится стандартным образом в рамках P -представления для матрицы плотности [10]. Приведем окончательные уравнения для стохастических переменных $\alpha_{1,2}$ и $\beta_{1,2}$. Для случая точного резонанса между частотами и резонаторными частотами, в рамках техники Ито, получаем:

$$d\alpha_1 = -(\gamma + \lambda \alpha_2 \beta_2) \alpha_1 dt + \varepsilon(t) \beta_2 dt + dW_{\alpha_1}, \quad (6)$$

$$d\beta_1 = -(\gamma + \lambda \alpha_2 \beta_2) \beta_1 dt + \varepsilon(t) \alpha_2 dt + dW_{\beta_1}. \quad (7)$$

Здесь $\varepsilon(t) = f(t)k/\gamma_3$, $\lambda = k^2/\gamma_3$, уравнения для α_2 , β_2 получаются из (6), (7) заменой индексов (1) $\rightarrow$ (2), (1) $\leftarrow$ (2), а ненулевые корреляторы шумовых членов равны: $\langle dW_{\alpha_1} dW_{\alpha_2} \rangle = (\varepsilon(t) - \lambda \alpha_1 \alpha_2) dt$, $\langle dW_{\beta_1} dW_{\beta_2} \rangle = (\varepsilon(t) - \lambda \beta_1 \beta_2) dt$. Отметим также, что при получении уравнений (6), (7) было использовано преобразова-

ние $a_L \rightarrow a_i \exp(-i\phi_i)$, $\phi_1 = \phi_2 = \frac{1}{2}(\phi_L + \phi_k)$, $\phi_3 = \phi_L$, благодаря которому удалось сократить фазы в уравнениях (6), (7).

Приведем некоторые результаты полуклассической теории НОПГ [11], которые необходимы для дальнейшего линейного по квантовым флуктуациям анализа уравнений (6), (7). Система имеет пороговое поведение относительно изменения усредненной по периоду модуляции амплитуды $\bar{f}(t) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$. Пороговое значение средней амплитуды равно

$$f_{th} = \gamma\gamma_3/k. \quad (8)$$

В режиме ниже порога генерации $\bar{f} < f_{th}$ реализуется нулевое решение: $\alpha_i = \beta_i = 0$. При $f > f_{th}$ средние числа фотонов субгармоник $n_{0i} = \langle \alpha_i, \beta_i \rangle$ ($i=1,2$) равны: $n_{01} = n_{02} = n_0$, а сумма фаз мод субгармоник равна $\phi_1 + \phi_2 = 2\pi k$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$, в то время как разность фаз НОПГ не имеет определенного значения, как и для обычного НОПГ. Среднее число фотонов удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt} n_0(t) = 2n_0(t)(\varepsilon(t) - \gamma - \lambda n_0(t)), \quad (9)$$

решение которого имеет следующий вид для времен ($t \gg \gamma^{-1}$), превышающих переходной режим:

$$n_0^{-1}(t) = 2\lambda \int_{-\infty}^t \exp\left(-2 \int_{\tau}^t (\varepsilon(t') - \gamma) dt'\right) d\tau. \quad (10)$$

Результаты в графической форме для случая гармонической модуляции $f = f_1 + f_2 \cos \delta t$ приведены на рис.1.

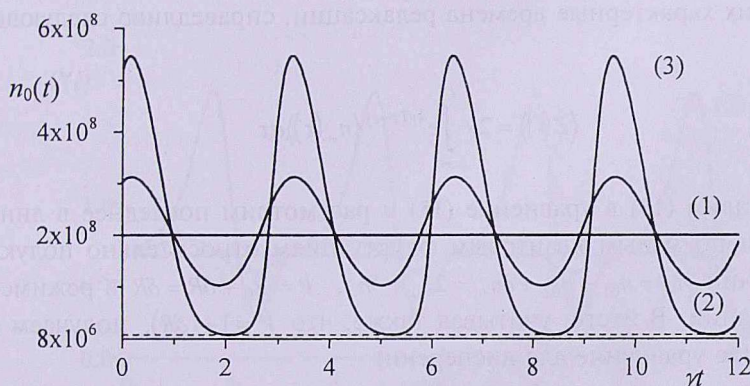


Рис.1. Среднее число фотонов субгармоник в зависимости от безразмерного времени для следующих параметров: $k/\gamma = 5 \cdot 10^{-4}$, $\gamma_3/\gamma = 25$, $\delta/\gamma = 2$, $\bar{f}/f_{th} = 3$, $f_1 = 0$ (кривая 1), $f_1 = 0.4\bar{f}$ (кривая 2), $f_1 = 1.2\bar{f}$ (кривая 3).

3. Анализ квантовых флуктуаций

Перейдем к получению уравнения непосредственно для дисперсии $V(t)$, исходя из стохастических уравнений (6), (7). Вначале обратимся к рассмотрению дисперсий квадратурных амплитуд через стохастические переменные, учитывая что в P -представлении средние значения от нормально упорядоченных операторов выражаются через средние от стохастических переменных. Результаты для минимизированного по фазам значения дисперсии, при $\theta_1 + \theta_2 + \phi_L + \phi_k = 2\pi m$, получаются в следующей форме:

$$V = 1 + \langle \alpha_1 \beta_1 \rangle + \langle \alpha_2 \beta_2 \rangle - \langle \alpha_1 \alpha_2 \rangle - \langle \beta_1 \beta_2 \rangle. \quad (11)$$

Для анализа этого выражения удобно перейти в уравнениях (6), (7) к новым стохастическим переменным:

$$R = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 - \alpha_1 \alpha_2 - \beta_1 \beta_2, \quad (12)$$

$$n_+ = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2, \quad (13)$$

$$Z = (\alpha_1 \beta_1 - \alpha_2 \beta_2)^2 + \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2. \quad (14)$$

Заметим, что в новых переменных $V = 1 + \langle R \rangle$. Используя правила Ито замены переменных в стохастических уравнениях, можно получить следующие уравнения для средних значений от новых переменных:

$$\frac{d\langle R \rangle}{dt} = -(2\varepsilon(t) + 2\gamma + \lambda)\langle R \rangle - \lambda\langle R n_+ \rangle - 2\varepsilon(t) + \lambda\langle Z \rangle, \quad (15)$$

$$\frac{d\langle n_+ \rangle}{dt} = (2\varepsilon(t) - 2\gamma - \lambda)\langle n_+ \rangle - \lambda\langle n_+^2 \rangle - 2\varepsilon(t)\langle R \rangle + \lambda\langle Z \rangle, \quad (16)$$

$$\frac{d\langle Z \rangle}{dt} = -4\gamma\langle Z \rangle - 2\gamma\langle n_+ \rangle. \quad (17)$$

С помощью уравнения (17) можно выразить $\langle Z(t) \rangle$ через $\langle n_+(t) \rangle$. Для времен, превышающих характерные времена релаксации, справедливо следующее выражение:

$$\langle Z(t) \rangle = 2\gamma \int_{-\infty}^t e^{4\gamma(\tau-t)} \langle n_+(\tau) \rangle d\tau. \quad (18)$$

Подставим (18) в уравнение (15) и рассмотрим последнее в линейном приближении по малым квантовым флуктуациям относительно полуклассических решений $n_+ = n_{01} + n_{02} + \delta n_+ = 2n_0 + \delta n_+$, $R = R_0 + \delta R = \delta R$ в режиме выше порога генерации. В итоге, учитывая также, что $V = 1 + \langle \delta R \rangle$, получаем следующее линейное уравнение для дисперсии:

$$\frac{dV(t)}{dt} = -2(\gamma + \varepsilon(t) + \lambda n_0(t))V(t) + 2\gamma + 2\lambda n_0(t) + 4\gamma\lambda \int_{-\infty}^0 e^{4\gamma\tau} n_0(t+\tau) d\tau. \quad (19)$$

Следует отметить, что система уравнений (6), (7) содержит малый параметр

$\lambda/\gamma \ll 1$, который в современных экспериментах имеет порядок $\lambda/\gamma \approx 10^{-6} - 10^{-8}$. Имея в виду это обстоятельство, в уравнении (19) опущены члены высших порядков по λ/γ . Уравнение (19) имеет следующее периодическое решение для времен, превышающих переходной режим:

$$V(t) = 2 \int_{-\infty}^t \exp\left(2 \int_{\tau}^t (\gamma + \varepsilon(t') + \lambda n_0(t')) dt'\right) \left[\gamma + \lambda n_0(\tau) + 2\gamma\lambda \int_{-\infty}^{\tau} e^{4\gamma(\tau'-\tau)} n_0(\tau') d\tau' \right] d\tau. \quad (20)$$

Рассмотрение режима генерации ниже порога приводит к результату, который получается из (20) при $n_0 = 0$. В частности, при отсутствии модуляции выражение (20) приводится к известному результату для обычного НОПГ.

4. Эффект квантовой перепутанности в модулированной динамике

Ниже приводятся конкретные результаты вычисления $V(t)$ для случая простой гармонической модуляции $f(t) = \bar{f} + f_1 \cos(\delta t)$. Ниже порога генерации имеем:

$$V(t) = 2\gamma \int_{-\infty}^t \exp\left[-2(\gamma + \bar{\varepsilon})(t - \tau) + 2\frac{\varepsilon_1}{\delta}(\sin(\delta t) - \sin(\delta \tau))\right] d\tau, \quad (21)$$

где $\bar{\varepsilon} = k\bar{f}/\gamma_3$, $\varepsilon_1 = kf_1/\gamma_3$. Заметим, что при отсутствии модуляции, $f_1 = 0$, наибольшее сжатие $V = 1/2$ достигается вблизи порога, при $\bar{f} = f_{th}$. Наша цель состоит в том, чтобы показать, как уменьшается уровень сжатия при включении модуляции. Как показывает анализ, сжатие меньше 50% уровня вакуумных флуктуаций достигается периодически для определенных временных интервалов, если модуляционная частота $\delta \approx \gamma$. Для наглядности приведем результаты вычислений в графической форме (см. рис.2) для тех же параметров, что и на рис.1.

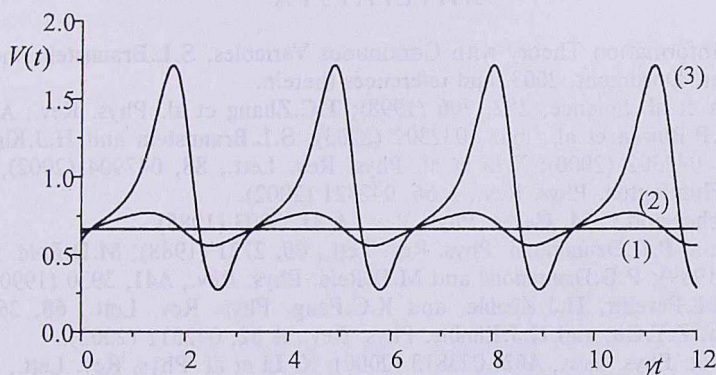


Рис.2. Зависимость дисперсии от безразмерного времени для следующих параметров: $k/\gamma = 5 \cdot 10^{-4}$, $\gamma_3/\gamma = 25$, $\delta/\gamma = 2$, $\bar{f}/f_{th} = 3$, $f_1 = 0$ (кривая 1), $f_1 = 0.4\bar{f}$ (кривая 2), $f_1 = 1.2\bar{f}$ (кривая 3).

Легко заметить, что при увеличении отношения $f_1/\bar{f}$ минимальные за период модуляции значения V существенно уменьшаются. Таким образом, вследствие модуляции формируются почти идеальные ЭПР состояния поля излучения, однако, для определенных временных интервалов.

Приведем приближенные выражения для случая слабой модуляции при $\bar{f}/f_{th} \ll \delta/\gamma$, в режиме ниже порога генерации:

$$V(t) \approx \frac{\gamma}{\gamma + \bar{\epsilon}} \left[1 - 2 \frac{\epsilon_1}{\delta} \frac{\sin(\delta t) + 2((\gamma + \bar{\epsilon})/\delta) \cos(\delta t)}{1 + 4((\gamma + \bar{\epsilon})/\delta)^2} \right]. \quad (22)$$

Максимальное сжатие реализуется при минимальном значении дисперсии V , которое равно

$$V_{\min} = \frac{\gamma}{\gamma + \bar{\epsilon}} \left[1 - 2 \frac{\epsilon_1}{\delta} \frac{1}{\sqrt{1 + 4((\gamma + \bar{\epsilon})/\delta)^2}} \right] \quad (23)$$

и достигается для временных интервалов $\delta t = \arctg[\delta/2(\bar{\epsilon} + \gamma)] + 2\pi k$. В общем случае, в режиме ниже порога генерации, из формулы (21) можно получить нижнюю границу дисперсии $V \geq f_{th}/(f_{th} + \bar{f} + f_1)$. Однако отметим, что такое ограничение степени перепутанности не имеет места в режиме генерации выше порога.

В заключение отметим, что хотя результаты линейной по квантовым флуктуациям теории не справедливы вблизи классического порога, выражения (20), (21) для дисперсий, как легко проверить, конечны при $\bar{f} = f_{th}$. Как показывает анализ, условие применимости результатов вблизи порога имеет вид $|f/f_{th} - 1| \ll (\lambda/\gamma) e^{2\epsilon_1\gamma/\epsilon_{th}\delta}$. Типичные значения параметра $\lambda/\gamma \approx 10^{-6} - 10^{-8} \ll 1$, поэтому для $\delta \approx \gamma$ приведенные результаты для дисперсий справедливы в непосредственной близости от порога генерации.

Работа поддержана МНТЦ, грант А-823 и NFSAT PH 098-02/CRDF 12052.

ЛИТЕРАТУРА

1. Quantum Information Theory with Continuous Variables, S.L.Braunstein and A.K.Pati, eds. Kluwer, Dordrecht, 2003, and references therein.
2. A.Furusawa et al. Science, **282**, 706 (1998); T.C.Zhang et al. Phys. Rev., **A67**, 033802 (2003); W.P.Bowen et al., ibid., 032302 (2003); S.L.Braunstein and H.J.Kimble. Phys. Rev., **A61**, 042302 (2000); X.Li et al. Phys. Rev. Lett., **88**, 047904 (2002); T.C.Ralph and E.H. Huntington. Phys. Rev., **A 66**, 042321 (2002).
3. B. Schumacher and C.M. Caves. Phys. Rev., **A 31**, 3093 (1985).
4. M.D.Reid and P.D.Drummond. Phys. Rev. Lett., **60**, 2731 (1988); M.D.Reid. Phys. Rev., **A40**, 913 (1989); P.D.Drummond and M.D.Reid. Phys. Rev., **A41**, 3930 (1990).
5. Z.Y.Ou, S.F.Pereira, H.J.Kimble, and K.C.Peng. Phys. Rev. Lett., **68**, 3663 (1992); S.F.Pereira, Z.Y.Ou, and H.J.Kimble. Phys. Rev., **A 62**, 042311 (2002).
6. Y.Zhang et al. Phys. Rev., **A62**, 023813 (2000); X. Li et al. Phys. Rev. Lett., **88**, 047904 (2002); S.Feng and O.Pfister, quant-ph/0310002 (2003).
7. G.Yu.Kryuchkyan and L.A.Manukyan. Phys. Rev., **A69**, 013813 (2004); K.DeChoum et al. quant-ph/0310129.
8. H.H.Adamyan and G.Yu.Kryuchkyan. Phys. Rev., **A69**, 053814 (2004).

9. L.M.Duan et al. Phys. Rev. Lett., **84**, 2722 (2000); R.Simon. Phys. Rev. Lett., **84**, 2726 (2000).
10. К.В.Гардинер. Стохастические методы в естественных науках. М., Мир, 1986.
11. А.О.Адамян. Изв. НАН Армении, Физика, **39**, 114 (2004).

ՔՎԱՆՏԱՅԻՆ ԽՃՃՎԱԾՈՒԹՅԱՆ ԲԱՐՉՐ ԱՍՏԻՃԱՆՈՎ ԼՈՒՍԱՅԻՆ ԴԱՇՏԵՐԻ ԳԵՆԵՐԱՅԻՄՆ

Հ.Հ. ԱԴԱՄՅԱՆ, Գ.ՅՈՒ. ԿՐՅՈՒՉԿՅԱՆ

Աշխատանքում ցույց է տրված մոդուլացված մղման դաշտի ազդեցության ներքո օպտիկական պարամետրային զենեռատորում (ՕՊԳ) լույսի քվանտային խճճվածության բարձր աստիճանով օժտված վիճակների ստացման հնարավորությունը: Համակարգում խճճվածության աստիճանը նկարագրող պարամետրի համար ստացվել է անալիտիկ լուծում շեմից բարձր և ցածր զենեռացիայի ռեժիմներում: Մոդուլացված ՕՊԳ-ում ստանդարտ ՕՊԳ-ի նկատմամբ խճճվածության աստիճանի էական լավացում է ցույց տրվել այն դեպքում, երբ մոդուլացման պարբերությունը մոտ է դիսիպատիվ պրոցեսի ժամանակին:

GENERATION OF LIGHT FIELDS WITH HIGH DEGREE OF QUANTUM ENTANGLEMENT

H.H. ADAMYAN, G.Yu. KRYUCHKYAN

The possibility of generation of light fields with high level of quantum entanglement in the optical parametric oscillator (OPO) driven by an amplitude-modulated pump field is shown. The analytical solution is obtained for the variance characterizing the degree of entanglement in the linear by quantum fluctuations approach for below- and above-threshold regimes. The essential improvement of the degree of entanglement in modulated OPO in comparison with ordinary one is demonstrated if the frequency of modulation is close to the decay rate of the dissipative process.