Известия НАН Армении, Физика, т.39, №4, с.221-224 (2004)

УДК 530.145

РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ЯНГА–БАКСТЕРА ДЛЯ ОДНОЙ ИНТЕГРИРУЕМОЙ МОДЕЛИ

Ш.А. ХАЧАТРЯН

Ереванский физический институт

(Поступила в редакцию 3 февраля 2004 г.)

Рассмотрены уравнения Янга–Бакстера для двумерной интегрируемой модели, построенной с помощью трехчастичных R-матриц, которые действуют в тензорном произведении трех векторных пространств. Эти матрицы имеют структуру, которая определена в работе [1]. Найдены общие решения уравнений.

Как известно, система в квантовой теории поля называется интегрируемой, если она имеет бесконечное число попарно коммутирующих зарядов или гамильтонианов. Коммутирующие заряды, являясь следствием богатой симметрии, позволяют решать систему точно, не прибегая к приближенным методам. Для многих точно решаемых моделей продуктивно работает квантовый метод обратной задачи [2-5]. Он дает условие, достаточное для существования бесконечного числа законов сохранений: коммутативность двух трансфер-матриц с разными спектральными параметрами:

$$[\tau(u),\tau(v)]=0\,. \tag{1}$$

Сохраняющиеся заряды определяются как логарифмические производные от трансфер матрицы:

$$H_n=\frac{d^n}{du^n}\ln\tau(u)\Big|_{u=u_0}\,. \tag{2}$$

Коммутативность трансфер-матриц (1) обеспечивается существованием невырожденной сплетающей матрицы $R_{\alpha\beta}(u,v)$, такой, чтобы выполнялось условие

$$R_{\alpha\beta}(u,v)T_\alpha(u)T_\beta(v)=T_\beta(v)T_\alpha(u)R_{\alpha\beta}(u,v)\,. \tag{3}$$

Здесь $T_\alpha=\prod_i R_{\alpha i}$ есть матрица монодромии (матрица перехода), $\tau=\mathrm{tr}_\alpha T_\alpha=\mathrm{tr}_\alpha\prod_i R_{\alpha i}$ (обычно операторы, стоящие в определении матрицы монодромии – локальные матрицы перехода $R_{\alpha i}$, обозначаются буквой L и называются L-матрицами). Матрицы $R_{\alpha i}$ действуют в тензорном произведении двух векторных пространств (двухчастичные R-матрицы):

$$(R_{\alpha i})^{\alpha_2 i_2}_{i_1\alpha_1} \mid \alpha_2 > \otimes \mid i_2 > = \mid i_1 > \otimes \mid \alpha_1 >, \qquad \alpha_k = 0,...,n_\alpha - 1, \quad i_k = 0,...,n_i - 1, \quad (4)$$

где n_α и n_i – соответствующие размерности пространств представлений.

Состояния, на которые действует трансфер-матрица, принято называть квантовыми, а состояния, по которым берется след в определении трансфер-матрицы – вспомогательными, в (3,4) они соответственно обозначены латинскими и греческими буквами.

Для выполнения условия (3) достаточно, чтобы имели место локальные соотношения, называемые уравнениями Янга–Бакстера:

$$R_{\alpha\beta}(u,v)R_{\alpha i}(u)R_{\beta j}(v) = R_{\beta j}(v)R_{\alpha i}(u)R_{\alpha\beta}(u,v)\,. \quad (5)$$

С помощью R-матриц, удовлетворяющих уравнению Янга–Бакстера, можно строить точно решаемые спиновые модели, решаемые модели классической статистической физики на двумерной решетке, отождествляя статистический вес с R-матрицей, а также интегрируемые модели квантовой теории поля на решетке в (1+1) пространстве-времени [5].

Здесь мы рассматриваем случай, когда трансфер-матрица строится вместо обычной для двумерных моделей двухчастичной матрицы (4), с помощью трехчастичной матрицы $R_{\alpha ij}$, которая действует в тензорном произведении трех векторных пространств, два из которых квантовые и одно вспомогательное, и не разлагается на произведение двухчастичных матриц:

$$(R_{\alpha ij})^{\alpha_2 i_2 j_2}_{i_1 j_1 \alpha_1} \mid \alpha_2 > \otimes \mid i_2 > \otimes \mid j_2 > = \mid i_1 > \otimes \mid j_1 > \otimes \mid \alpha_1 >, \quad (6)$$

$$R_{\alpha ij} \neq R_{\alpha i} R_{\alpha j}\,. \quad (7)$$

Такая матрица была определена в работе [1], в которой исследована система свободных фермионных квантовых полей со спином 0 на одной из поверхностей дуальной объемно-центрированной кубической решетки. Эта модель связана с интерпретацией модели Изинга в трех измерениях как фермионная струнная теория на двумерных поверхностях при учете так называемого “знакового фактора” [6,7]. Задача в [1] решалась методом трансфер-матриц. В этом случае трансфер-матрица осуществляет эволюцию квантовых состояний на один шаг в дискретном мнимом времени, являясь функцией от ферми-полей. Производящий функционал определяется как фейнмановский интеграл по грассмановым переменным. Он связан с трансфер-матрицей следующим образом:

$$Z = \int D\overline{\psi}\, D\psi e^{-\sum A(\overline{\psi},\psi)} = \mathrm{tr}\prod \tau\,, \quad (8)$$

где $\sum A(\overline{\psi},\psi)$ – локальное квадратичное действие ферми-полей на эвклидовой решеточной (1+1) пространство-времени, а произведение в следе берется по дискретным значениям времени. Роль R-матриц играют функции $e^{A(\overline{\psi},\psi)}$, соответствующие вкладу в Z от взаимодействий ближайших соседей. Переход для R от фермионного к обычному матричному представлению осуществляется при помощи перехода из базиса фермионных когерентных состояний в базис двумерного векторного пространства (более детально см. в [1,7,8]). В (8) встречаются R-матрицы обоих видов (4,6). Для этих матриц выполняется условие сохранения числа частиц: суммы верхних и нижних индексов матричных элементов равны, для $R_{\alpha ij}$ это есть

$$\alpha_1 + i_1 + j_1 = \alpha_2 + i_2 + j_2, \quad \alpha_k, i_k, j_k = 0,1. \tag{9}$$

Трехчастичная матрица в ферми-представлении содержит три фермионных поля, а матричные элементы удовлетворяют условиям

$$R_{100}^{010} = R_{001}^{001} = R_{111}^{111} = 0\,, \tag{10}$$

которые и приводят к ограничению (7).

Так как для $R_{\alpha ij}$-матрицы существует представление "свободных фермионов" (действие A в (8) квадра́тичное), это накладывает определенные соотношения на матричные элементы:

$$\begin{gathered}
R_{000}^{000}R_{101}^{011} = R_{001}^{010}R_{100}^{001}, \quad R_{011}^{110}R_{101}^{011} = R_{011}^{011}R_{101}^{110}, \quad R_{110}^{101}R_{101}^{011} = R_{101}^{101}R_{110}^{011}, \\
R_{011}^{101}R_{101}^{011} = R_{011}^{011}R_{101}^{101}, \quad R_{110}^{110}R_{101}^{011} = R_{101}^{110}R_{110}^{011}, \quad R_{001}^{100}R_{101}^{011} = R_{101}^{101}R_{001}^{010}, \\
R_{010}^{010}R_{101}^{011} = R_{001}^{010}R_{110}^{011}, \quad R_{010}^{001}R_{101}^{011} = R_{011}^{011}R_{100}^{001}, \quad R_{100}^{100}R_{101}^{011} = R_{101}^{110}R_{100}^{001}, \\
R_{010}^{100}R_{101}^{011} = R_{010}^{010}R_{101}^{101} + R_{100}^{100}R_{011}^{011},
\end{gathered} \tag{11}$$

Для двухчастичной матрицы аналогичное соотношение

$$R_{00}^{00}R_{11}^{11} + R_{01}^{10}R_{10}^{01} = R_{10}^{10}R_{01}^{01}\,, \tag{12}$$

известно, например, из XX модели Гейзенберга.

Здесь мы предлагаем модель с трансфер-матрицей из трехчастичных R-матриц, которые удовлетворяют всем перечисленным выше условиям:

$$\tau(u) = \mathrm{tr}_\alpha \prod\nolimits_i R_{\alpha i i+1}(u)\,. \tag{13}$$

Локальными условиями интегрируемости для такой системы являются уравнения

$$R_{\alpha\beta}(u,v)R_{\alpha i i+1}(u)R_{\beta i i+1}(u)(v) = R_{\beta i i+1}(u)(v)R_{\alpha i i+1}(u)R_{\alpha\beta}(u,v)\,. \tag{14}$$

Они отличаются от обычных уравнений Янга-Бакстера наличием трехчастичных операторов.

Система (14) состоит из 256 уравнений, из которых, благодаря условию сохранения числа частиц (9), нетривиальны только 70. Соотношения (11,12) сокращают число независимых уравнений до 17. Более удобно решать уравнения в фермионном представлении в базисе когерентных состояний, тогда произведения операторов реализуются интегрированием по грассмановым переменным [4]. Вычисления дают следующие соотношения для элементов трехчастичной и двухчастичной сплетающей R-матриц:

$$
\begin{gathered}
R_{001}^{010}(u)R_{101}^{101}(u)=R_{001}^{010}(v)R_{101}^{101}(v), \quad R_{100}^{001}(u)R_{011}^{011}(u)=R_{100}^{001}(v)R_{011}^{011}(v), \\
R_{110}^{011}(u)=R_{110}^{011}(v), \quad R_{101}^{101}(u)=R_{110}^{011}(u)^{-1}, \quad R_{101}^{011}(u)=1, \\
R_{00}^{00}(u,v)R_{11}^{11}(u,v)=\frac{R_{001}^{010}(u)R_{100}^{001}(u)}{R_{001}^{010}(v)R_{100}^{110}(v)}, \quad R_{01}^{01}(u,v)=R_{10}^{10}(u,v)=0, \\
R_{01}^{10}(u,v)=1, \quad R_{10}^{01}(u,v)=R_{00}^{00}(u,v)R_{11}^{11}(u,v).
\end{gathered} \tag{15}
$$

Соотношения (15), вместе с (9), (11), (12) полностью определяют решения уравнений Янга-Бакстера (12). Обшие решения для $R_{\alpha ij}$, удовлетворяющие им, зависят от двух произвольных функций:

$$
\begin{array}{lll}
R_{100}^{001}(u)=f(u), & R_{101}^{101}(u)=\eta_2 g(u), & R_{110}^{101}(u)=\eta_2\eta_3 g(u), \\
R_{010}^{010}(u)=\eta_1, & R_{100}^{001}(u)=\eta_3, & R_{000}^{000}(u)=\eta_2 f(u)g^{-1}(u), \\
R_{001}^{100}(u)=\eta_2, & R_{100}^{001}(u)=\eta_4, & R_{011}^{110}(u)=\eta_1\eta_4 f^{-1}(u), \\
R_{011}^{011}(u)=\eta_1 f^{-1}(u), & R_{001}^{010}(u)=g^{-1}(u), & R_{011}^{101}(u)=\eta_1\eta_2 f^{-1}(u)g(u), \\
R_{100}^{100}(u)=\eta_4 f(u), & R_{010}^{010}(u)=\eta_3 g^{-1}(u), & R_{101}^{011}(u)=1, \\
R_{100}^{100}(u)=\eta_1\eta_4+\eta_2\eta_3, & R_{110}^{101}(u)=1, & \eta_3\eta_4=1.
\end{array} \tag{16}
$$

Остальные матричные элементы равны нулю. Здесь η_k – числа, а $f(u)$, $g(u)$ – произвольные функции, не равные друг другу. Еще нужно помнить, что решения уравнений Янга–Бакстера определены до умножения на произвольную функцию. Частные значения функций и чисел можно определить, наложив дополнительные симметрии и нормировочные условия.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Sh.Khachatryan, A.Sedrakyan**. Phys. Lett. A, **293**, 173 (2002).
2. **R.J.Baxter**. Exactly solved models in statistical mechanics. London, New York, Academic Press, 1982.
3. **C.Gomez, M.Ruiz-Altaba, G.Sierra**. Quantum groups in two-dimensional physics. Cambridge, 1994.
4. **L.D.Faddeev**. Integrable models in (1+1)-dimensional models, in Proceedings, Les Houches XXXIX. Elsevier, Amsterdam, 1982.
5. **Л.А.Тахтаджян, Л.Д.Фаддеев**. УМН, **34**, 13 (1979).
6. **A. Kavalov, A.Sedrakyan.** Phys. Lett. B, **173**, 449 (1986).
7. **A.Sedrakyan.** Nucl. Phys. B, **554**, 514 (1999).
8. **F.Gohmann, S.Murakami.** J. Phys. A: Math. Gen., **30**, 5269 (1997).

SOLUTIONS OF THE YANG–BAXTER EQUATIONS FOR AN INTEGRABLE MODEL

Sh.A. KHACHATRYAN

The Yang–Baxter equations are considered for a two-dimensional integrable model constracted via three-particle R-matrices acting on the tensor product of three-vector spaces. These matrices are defined in the work [1]. The general solutions of these equations are found.