Известия НАН Армении, Физика, т.39, №2, с.87-92 (2004)

УДК 621.372

ВОЗБУЖДЕНИЕ РЕЗОНАТОРА С КОНЕЧНОЙ ДОБРОТНОСТЬЮ

Э.Д. ГАЗАЗЯН, Г.Г. ОКСУЗЯН, А.Д. ТЕР-ПОГОСЯН

Ереванский физический институт

(Поступила в редакцию 28 июля 2003 г.)

Развита теория возбуждения регулярного цилиндрического металлического резонатора с учетом конечной проводимости его стенок. Получены выражения для напряженности поля в резонаторе с конечной добротностью и величины энергии, накапливаемой в таком резонаторе.

1. Введение

При использовании в измерительных схемах объемных резонаторов часто возникает вопрос о величине напряженности электромагнитных полей, а также о величине накапливаемой в них энергии. Например, в работах [1,2] разработано сканирующее устройство, использующее объемные резонаторы для развертки электронного сгустка с целью его мониторинга. Эффективность работы этого устройства обусловлена величиной напряженности магнитного (электрического) поля в резонаторе, которая в свою очередь обусловлена величиной добротности этого резонатора. В работах [3,4] исследовалась проблема двухпучковой схемы ускорения, основанная на эффекте переходного излучения в цепочке слабосвязанных резонаторов. В этом случае величина ускоряющей напряженности (градиент ускорения) обусловлена числом сгустков в ускоряющем пучке и величиной добротности резонаторов в цепочке, обеспечивающей эффективное ускорение второго (ускоряемого) пучка. Таким образом, знание величины добротности резонаторов в первом случае необходимо для выбора нужного источника питания, а также для обеспечения работоспособности схемы измерений, особенно, когда накапливаемые предельные энергии могут привести к перегреву резонатора. В случае двухпучковой схемы ускорения величина добротности резонаторов в цепочке диктует выбор пучка (числа сгустков в пучке) для достижения нужного темпа ускорения: как было показано в работе [3], число эффективно излучающих сгустков в их периодической последовательности оказывается порядка добротности и вклад остальных сгустков сводится к компенсации потерь в стенках резонатора и поддержанию напряженности поля в резонаторе.

Хотя очевидно, что реальные значения напряженностей полей в резонаторах должны быть обусловлены их добротностью, тем не менее теоретически обоснованные оценки в известной нам литературе отсутствуют. В настоящей работе мы пытаемся восполнить этот пробел на примере осесимметричного цилиндрического резонатора.

2. Поле в резонаторе

Если объемный резонатор имеет идеально проводящие стенки, то его добротность бесконечна, а собственные колебания имеют бесконечно тонкую ширину по частоте. Однако любая реальная система обладает конечной проводимостью стенок, т.е. спектральные линии частот имеют конечную ширину $\Delta\omega_n = \omega_n / Q_n$, где n – номер моды, ω_n – собственные частоты, Q_n – добротность резонатора, соответствующая данной моде [5-8]. В таком резонаторе структура поля остается практически неизменной, т.е. будет описываться выражениями для идеального резонатора.

Не умаляя общности, рассмотрим некоторый осесимметричный резонатор с осью z. Пусть такой резонатор возбуждается внешним током $\mathbf{j}(x, y, z, t)$ с компонентами

$$j_x = 0\,, \quad j_y = 0\,, \quad j_z = j_0(x, y, z)e^{-i\omega_0 t}\theta(t), \quad \theta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0\,, \\ 0, & t < 0\,, \end{cases} \tag{1}$$

где $\theta(t)$ – функция Хевисайда. Такой ток в резонаторе будет генерировать E-волну, начиная с момента времени $t = 0$.

Из уравнений Максвелла

$$\mathrm{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \qquad \mathrm{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}\,, \quad \mathrm{div}\mathbf{E} = 0\,, \quad \mathrm{div}\mathbf{H} = 0 \tag{2}$$

следует уравнение для E_z-компоненты поля:

$$\Delta E_z - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial j_z}{\partial t}, \tag{3}$$

причем

$$\frac{\partial j_z}{\partial t} = -i\omega_0 j_0 \theta(t) e^{-i\omega_0 t} + j_0 \theta'(t) e^{-i\omega_0 t}.$$

Заметим, что $\theta'(t)$ – дельта функция Дирака $\delta(t)$.

Разложим поле и ток в интегралы Фурье по частоте:

$$E_z = \int E_{z\omega} e^{-i\omega t} d\omega\,, \qquad j_z = \int j_{z\omega} e^{-i\omega t} d\omega\,, \qquad \frac{\partial j_z}{\partial t} = \int \left(\frac{\partial j_z}{\partial t}\right)_{\omega} e^{-i\omega t} d\omega\,. \tag{4}$$

Отсюда

$$\left(\frac{\partial j_z}{\partial t}\right)_{\omega} = \frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial j_z}{\partial t} e^{i\omega t} dt = \frac{j_0}{2\pi}\left(1 - 2\pi i \omega_0 \delta_+(\omega - \omega_0)\right), \tag{5}$$

где

$$\delta_+(\omega - \omega_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} e^{i(\omega - \omega_0)t} dt\,.$$

Собственные частоты ω_n и собственные функции $\Psi_n(x,y,z)$ резонатора удовлетворяют уравнению

$$\Delta\Psi_n + \frac{\omega_n^2}{c^2}\Psi_n = 0 .$$

Представив далее $E_{z\omega}$ в виде разложения по ортонормированным собственным функциям резонатора Ψ_n

$$E_{z\omega} = \sum_n a_n \Psi_n \tag{6}$$

и подставив в (3) выражение для правой части в виде (5), приходим к уравнению

$$\left(-\omega_n^2 + \omega^2\right) a_n \Psi_n = 2 j_0 \left(1 - 2\pi i \omega_0 \delta_+(\omega - \omega_0)\right). \tag{7}$$

Умножив правую и левую части уравнения (7) на $\Psi_m(x,y,z)$, проинтегрировав затем по объему резонатора V и воспользовавшись свойством ортонормированности собственных функций $\Psi_n(x,y,z)$, получаем

$$a_n = \frac{2[j_0\Psi_n]\left(1 - 2\pi i \omega_0 \delta_+(\omega - \omega_0)\right)}{\omega^2 - \omega_n^2},$$

где через $[j_o\Psi_n]$ обозначен интеграл $\int j_0 \Psi_n dV$ по области $j_0 \neq 0$.

Окончательно, для n-ой моды E_{nz} получаем

$$E_{nz}(x,y,z,t) = \int_{-\infty}^{\infty} E_{z\omega} e^{-i\omega t} d\omega = 2[j_0\Psi_n]\Psi_n \int_{-\infty}^{-\infty} \frac{1 - 2\pi i \omega_0 \delta_+(\omega - \omega_0)}{\omega^2 - \omega_n^2} e^{-i\omega t} d\omega . \tag{8}$$

Из (8) следует, что при $\omega = \omega_n$ амплитуда поля расходится, что обусловлено допущением идеальности резонатора (резонанс). В действительности, при $\omega \sim \omega_n$ амплитуда поля должна расти, оставаясь, однако, конечной. При этом в резонаторе будет возбуждаться только n-ая мода. Как было отмечено выше, наличие добротности приводит к уширению спектральной линии, т.е. частоты ω_n следует описывать как

$$\omega_n\left(1 - \frac{i}{2Q}\right) \equiv \omega_n - i\eta , \qquad \eta = \frac{\omega_0}{2Q} > 0 \tag{9}$$

(см., например, [5-8]). Подробно рассмотрим интеграл в правой части (8):

$$\begin{aligned} &\int \frac{\left(1 - 2\pi i \omega_0 \delta_+(\omega - \omega_0)\right) e^{-i\omega t}}{\omega^2 - \omega_n^2} d\omega = \\ &= \int \frac{e^{-i\omega t}}{(\omega - \omega_n + i\eta)(\omega + \omega_n - i\eta)} d\omega + \omega_0 \int \frac{e^{-i\omega t}}{(\omega - \omega_n + i\eta)(\omega + \omega_n - i\eta)(\omega - \omega_0 + i\varepsilon)} d\omega , \end{aligned} \tag{10}$$

где подставлено (см., например, [9])

$$2\pi i\delta_+(\omega-\omega_0) = -\frac{1}{\omega-\omega_0+i\varepsilon}, \quad \varepsilon \to +0 .$$

Перейдем в (10) к интегрированию в комплексной плоскости ω (см.рис.1).

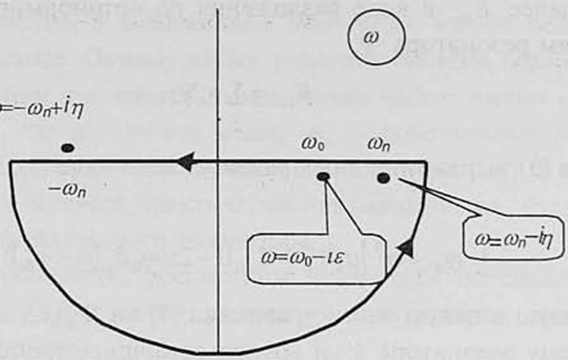

Рис.1.

Замкнув контур интегрирования в нижней полуплоскости (т.к. $t>0$ и поэтому удовлетворяется условие Жордана), видим, что вклад в интеграл (10) дают полюса $\omega_0 - i\eta$ и $\omega_0 - i\varepsilon$, т.е.

$$\int = -2\pi i\left(\frac{e^{-i(\omega_n-i\eta)t}}{2(\omega_n-i\eta)} + \frac{\omega_0 e^{-i(\omega_n-i\eta)t}}{2(\omega_n-i\eta)(\omega_n-i\eta-\omega_o+i\varepsilon)} + \frac{\omega_0 e^{-i(\omega_0-i\varepsilon)t}}{(\omega_o-i\varepsilon-\omega_n+i\eta)(\omega_o+\omega_n-2i\eta)}\right).$$

Устремляя далее $\varepsilon \to 0$ и $\omega_0 \to \omega_n$, получаем

$$\int = -\frac{\pi}{\eta}\left(1-e^{-\eta t}+\frac{i\eta}{\omega_n}e^{-\eta t}\right)e^{-i\omega_n t} = -\frac{2\pi Q}{\omega_n}\left(1-e^{-\omega_n t/2Q}+\frac{i}{2Q}e^{-\omega_n t/2Q}\right)e^{-i\omega_n t} \approx$$
$$\approx -\frac{2\pi Q}{\omega_n}\left(1-e^{-\omega_n t/2Q}\right)e^{-i\omega_n t}. \tag{11}$$

Окончательно, из (8) и (11) имеем:

$$E_{zn} = -\frac{4\pi Q}{\omega_n}\Psi_n\left[j_0\Psi_n\right]\left(1-e^{-\omega_n t/2Q}\right)e^{-i\omega_n t}. \tag{12}$$

Как видно, при $\omega_0 \sim \omega_n$ амплитуда поля растет пропорционально Q (см. также [7]). Содержание этого утверждения сводится к следующему: если в замкнутый резонатор непрерывно будет поступать энергия электромагнитного поля в виде монохроматической волны на частоте, совпадающей с одной из ее собственных частот ($\omega_o = \omega_n$), то напряженность поля в резонаторе на этой частоте будет вначале расти, при $t \ll 2Q/\omega_o$, линейно, пропорционально времени t поступления мощности в резонатор:

$$E_{zn} = -2\pi t \Psi_n \left[j_0 \Psi_n \right] e^{-i\omega_n t}, \tag{12a}$$

а для времен $t >> 2Q / \omega_0$ она примет значение

$$E_{zn} = -\frac{4\pi Q}{\omega_n} \Psi_n \left[j_0 \Psi_n \right] e^{-i\omega_n t}, \tag{12b}$$

пропорциональное добротности Q. В резонаторе устанавливается динамическое равновесие, т.е. дальнейший рост напряженности будет компенсирован потерями в стенках. В случае идеально проводящих стенок напряженность в течение бесконечного времени должна была бы расти бесконечно, что является математической идеализацией.

3. Энергия, накопленная в резонаторе

Перейдем к рассмотрению энергетических характеристик резонатора с конечной добротностью, возбуждаемого монохроматическим источником (1).

Будем исходить из теоремы Пойнтинга

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\int \mathbf{j}\,\mathbf{E} dV - \frac{c}{4\pi} \int [\mathbf{E}\mathbf{H}] d\mathbf{S}. \tag{13}$$

В (13) $W = \frac{1}{8\pi} \int (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2) dV$ суть энергия в резонаторе, среднее значение которой принято называть "запасенной" энергией. Первый член в правой части (13) – работа, совершаемая полем излучения над током возбуждения, т.е. энергия, накапливаемая в резонаторе в процессе возбуждения его током (1), и, наконец, последний член – поток вектора Пойнтинга через стенки резонатора, если они обладают конечной проводимостью. Эта часть энергии соответствует омическим потерям и затрачивается на нагрев стенок резонатора.

Вследствие комплексности выражений $\mathbf{j}$ и $\mathbf{E}$ можно записать (см., например, [10])

$$\mathrm{Re} \int j_z^* E_z dV = 2 \int \overline{\mathrm{Re}\, E_z \,\mathrm{Re}\, j_z} dV. \tag{14}$$

Воспользовавшись далее выражениями (1) и (12), получаем при $\omega_0 = \omega_n$:

$$\mathrm{Re}\, E_z = -\frac{4\pi Q}{\omega_n} \left[j_0 \Psi_n \right] \Psi_n \left(1 - e^{-\frac{\omega_n t}{2Q}} \right) \cos(\omega_n t), \qquad \mathrm{Re}\, j_z = j_0 \theta(t) \cos \omega_n t.$$

Тогда для первого члена в правой части (13), т.е. для энергии, накопленной в резонаторе, будем иметь:

$$-\mathrm{Re} \int j_z^* E_z dV = \frac{8\pi Q}{\omega_n^2} \left[j_0 \Psi_n \right]^2 \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left[1 - \exp\left(-\frac{\omega_n t}{2Q} \right) \right] \cos^2 \omega_n t d(\omega_n t) = \frac{4\pi Q}{\omega_n^2} \left[j_0 \Psi_n \right]^2, \tag{15}$$

если учесть, что вклад второго слагаемого в квадратных скобках стремится к нулю при $T \to \infty$. Таким образом, энергия, накапливаемая в резонаторе с добротностью Q при непрерывном питании источником (1), будет увеличиваться в Q раз. Дальнейший рост ограничивается потерями, обусловленными последним членом в (13).

4. Заключение

Таким образом, амплитуда напряженности поля в резонаторе с конечной добротностью Q при непрерывном питании его ($t >> Q / \omega_0$) монохроматическим точечным источником электромагнитных волн оказывается ограниченной значением этой добротности. При этом в резонаторе будут существовать электромагнитные колебания, если частота источника питания (ω_0) будет совпадать (резонанс) с частотой одной из собственных мод (ω_n) резонатора (см. формулы (11-14).

С другой стороны, поскольку с увеличением напряженности поля увеличиваются также потери в стенках резонатора, то накопленная в резонаторе энергия при его непрерывном питании монохроматическим источником увеличивается только в Q раз (15). Заметим, далее, что вычисленная в [6] мощность потерь оказывается обратно пропорциональной добротности, что очевидно: при $Q \to \infty$ потери в стенках стремятся к нулю.

Работа выполнена при поддержке гранта МНТЦ А-372.

ЛИТЕРАТУРА

1. **V.Guidi, L.Guidi, L.Tecchio, P.Bak, P.Logachev, E.Pyta, S.Gurov, Yu.Chernousov**. Proc. Third Int. Symp.—MPLP (Modern Problems of Laser Physics), Novosibirsk, pp.156-161 (2000).
2. **A.V.Aleksandrov, N.S.Dikansky, V.Guidi**, et al. Proc. of the 1999 Particle Accelerator Conference, New York, pp.2948-2950 (1999).
3. **Э.А.Беглоян, Э.Д.Газазян, В.Г.Кочарян, Э.М Лазиев**. Изв. ВУЗ-ов, Радиофизика, **35**, 79 (1992).
4. **E.D.Gazazyan, M.I.Ivanyan**. EPAC-2000, Vienna, talk TUP 4A11, pp.477-479 (2000).
5. **Л.А.Вайнштейн**. Электромагнитные волны. М., Радио и связь, 1988.
6. **Дж.Джексон**. Классическая электродинамика, М., Мир, 1965.
7. **В.В.Батыгин, И.Н.Топтыгин**. Сборник задач по электродинамике. М., Наука, 1970.
8. **Б.З.Каценеленбаум**. Высокочастотная электродинамика. М., Наука, 1966.
9. **Н.Н.Боголюбов, Д.В.Ширков**. Введение в теорию квантованных полей. ГИТТЛ, М., 1957.
10. **Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц**. Теория поля. М., ГИФМЛ, 1960.

EXCITATION OF CAVITY HAVING A FINITE QUALITY

E.D. GAZAZYAN, G.G. OKSUZYAN, A.D. TER-POGHOSYAN

The theory of excitation of regular cylindrical cavity is developed, taking into account the finite conductivity of cavity walls. It is shown that the field strength in the cavity as well as the energy accumulated in it increase proportionally to the quality factor Q.