Известия НАН Армении, Физика, т.39, №2, с.71-77 (2004)

УДК 535.016

ПРЕДЕЛ СИЛЬНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В ФОТОАССОЦИАЦИИ ХОЛОДНЫХ АТОМОВ

А.М. ИШХАНЯН

Инженерный центр НАН Армении

(Поступила в редакцию 3 ноября 2003 г.)

Рассмотрен предел сильной связи в модельной нелинейной двухуровневой задаче, описывающей фотоассоциацию атомарного Бозе-Эйнштейновского конденсата. Для класса моделей пересечения термов с постоянной амплитудой внешнего поля разработана общая стратегия решения задачи, основанная на сведении начальной системы уравнений, написанных для полуклассических амплитуд вероятностей атомного и молекулярного состояний, к нелинейному дифференциальному уравнению третьего порядка, которое в общем случае переменных расстроек затем сводится к некоторому предельному нелинейному уравнению первой степени.

1. Введение

Двухмодовая фотоассоциация Бозе-Эйнштейновского конденсата [1] описывается следующей системой *нелинейных* полуклассических уравнений, задающих эволюцию атомарного и молекулярного состояний:

$$i\frac{da_1}{dt}=U(t)e^{-i\delta(t)}\overline{a}_1 a_2,\quad i\frac{da_2}{dt}=\frac{U(t)}{2}e^{i\delta(t)}a_1 a_1, \tag{1}$$

где a_1 и a_2 являются амплитудами, соответственно, атомарного и молекулярного состояний, $U=U(t)$ – частота Раби, а $\delta=\delta(t)$ – функция модуляции соответствующей расстройки. Начальными условиями являются $|a_1(-\infty)|^2=1$, $|a_2(-\infty)|^2=0$. Система (1) сохраняет общее число частиц, которое мы нормируем на единицу: $|a_1|^2+2|a_2|^2=\text{const}=1$.

Нетрудно показать, что временная эволюция вероятности молекулярного состояния $p(t)=|a_2(t)|^2$ определяется следующим нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнением третьего порядка:

$$p_{ttt}-\left(\frac{\delta_{tt}}{\delta_t}+2\frac{U_t}{U}\right)p_{tt}+\left[\delta_t^2+4U^2(1-3p)-\left(\frac{U_t}{U}\right)_t+\frac{U_t}{U}\left(\frac{\delta_{tt}}{\delta_t}+\frac{U_t}{U}\right)\right]p_t+$$
$$+\frac{U^2}{2}\left(\frac{\delta_{tt}}{\delta_t}-\frac{U_t}{U}\right)(1-8p+12p^2)=0. \tag{2}$$

В случае постоянной амплитуды поля, $U=U_0=\text{const}$, это уравнение существен-

но упрощается:

$$p_{ttt} - \frac{\delta_{tt}}{\delta_t} p_{tt} + \left[\delta_t^2 + 4U_0^2(1-3p)\right]p_t + \frac{U_0^2}{2}\frac{\delta_{tt}}{\delta_t}\left(1-8p+12p^2\right) = 0 . \qquad (3)$$

Ранее нами было показано [2], что полученное уравнение эквивалентно некоторому нелинейному уравнению Вольтерра второго рода [3]. Последнее уравнение позволяет в случае малых U_0^2 построить решение задачи в виде равномерно сходящегося ряда, используя последовательные приближения Пикара [3]. Мы применяли этот подход при рассмотрении задачи Ландау–Зинера [4]. С помощью данного интегрального уравнения Вольтерра могут быть изучены и другие аналогичные модели. Тем самым метод может быть принят в качестве общей стратегии подхода к решению нелинейных двухуровневых задач в пределе слабых взаимодействий. Противоположный же предел *сильного* взаимодействия представляет собой намного более сложную задачу. Исследование именно этого предела является целью настоящей работы. В данном случае эволюция вероятности перехода как функции времени обнаруживает значительные отклонения от линейного случая.

Наше рассмотрение предела сильной связи существенным образом основано на уравнении (3), где в данном случае имеется большой параметр – интенсивность поля U_0^2. Анализ данного уравнения наводит на мысль, что наиболее важными членами являются последние два, т.е. в первом приближении можно пренебречь двумя первыми членами с производными второго и третьего порядков. Как будет показано ниже, в большинстве случаев это справедливо: при высоких интенсивностях поля поведение системы существенным образом описывается нелинейным уравнением первого порядка, составленным из двух последних членов уравнения (3). Задача Раби ($\delta_t = \text{const}$) является исключением, поскольку, как непосредственно видно, последний член уравнения (а также второй) в данном случае отсутствует. Следовательно, в этом случае мы должны рассматривать нелинейное уравнение третьего порядка. В результате, в значительной мере меняется структура решения. Как мы увидим, некоторые черты, характерные для задачи Раби, выражены также и в представленных нами моделях с периодическим пересечением термов.

По вышеуказанным причинам мы сначала изучаем задачу Раби и родственные модели с периодическими пересечениями термов. Далее будет рассмотрен общий случай переменных расстроек и разработан общий подход, применимый ко всем задачам с переменной функцией модуляции расстройки. С помощью данного подхода мы выводим простую приближенную формулу для конечной вероятности перехода в молекулярное состояние для первой экспоненциальной модели Никитина [5] и показываем, что в данном случае предел сильной связи не оптимален для перевода атомов в молекулярное состояние. Подобное поведение, конечно, совершенно отличается от отклика линейной двухуровневой системы на возбуждение сильным лазерным полем.

2. Задача Раби и модели с периодическими пересечениями термов

При постоянной расстройке, $\delta_t = \delta_0$, уравнение (3) принимает вид

$$p_{ttt} + [\delta_0^2 + 4U_0^2(1-3p)]p_t = 0. \tag{4}$$

Это уравнение легко интегрируется один раз:

$$p_{tt} + [\left(\delta_0^2 + 4U_0^2\right)p - 6U_0^2 p^2] = C_1/2. \tag{5}$$

Затем, полагая $p_t = \Phi(p)$, имеем

$$\Phi^2 + [\left(\delta_0^2 + 4U_0^2\right)p^2 - 4U_0^2 p^3] = C_1 p + C_0, \tag{6}$$

что приводит к выражению

$$t - t_0 = \int \frac{dp}{\sqrt{C_0 + C_1 p - \left(\delta_0^2 + 4U_0^2\right)p^2 + 4U_0^2 p^3}}, \tag{7}$$

где следует положить $C_0 = 0$ и $C_1 = U_0^2$ согласно начальным условиям $p(t_0) = p_t(t_0) = 0$, $p_{tt}(t_0) = U_0^2/2$. Появившийся здесь интеграл сводится к эллиптическому интегралу первого рода, и в результате окончательное решение выражается через эллиптическую функцию Якоби [6]:

$$p = p_1 \operatorname{sn}^2[\sqrt{p_2}U_0(t-t_0); m], \tag{8}$$

где
$$p_{1,2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\delta_0^2}{4U_0^2} + 1\right) \mp \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{\delta_0^2}{4U_0^2} + 1\right)^2 - \frac{1}{4}}, \quad m = \frac{p_1}{p_2}. \tag{9}$$

Это – периодическое решение с периодом, задаваемым формулой

$$T(m) = \frac{\pi}{\sqrt{p_2}U_0} {}_2F_1(1/2, 1/2; 1; m). \tag{10}$$

В режиме слабого взаимодействия $m \approx 0$, и мы имеем слегка возмущенные линейные синусоидальные осцилляции Раби. Однако, с увеличением интенсивности поля появляется все больше и больше гармоник, вид функции все более приближается к прямоугольному с увеличивающейся длиной (рис.1). В конечном счёте, в пределе сильной связи $U_0^2 \to \infty$ $(m \to 1)$ получаем

$$p = \frac{1}{2}\tanh^2\left[\frac{U_0(t-t_0)}{\sqrt{2}}\right], \tag{11}$$

т.е. полный перевод в молекулярное состояние при $t \to \infty$, если стартовать с чисто атомарного конденсата при $t = t_0$ (рис.1). Очевидно, что предел $U_0^2 \to \infty$ эквивалентен случаю точного резонанса при конечных интенсивностях поля $(U_0^2 < \infty)$.

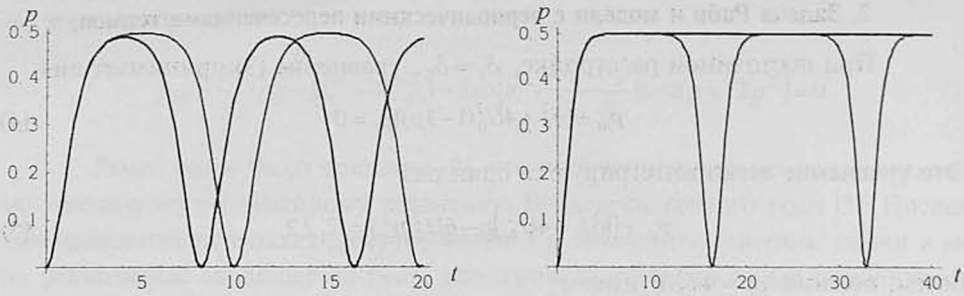

Рис.1. Решение Раби: промежуточный режим, U_0^2/δ_0^2 ~1 (слева) и предел сильной связи, U_0^2/δ_0^2 >>1 (справа).

Полагая $\delta_t = f(p)$ (или в более общем случае $U = U(t)$ и $\delta_t = U(t)f(p)$, см. [7]), получим родственные, *точно решаемые классы* моделей *с периодическими пересечениями* термов. Это легко можно понять, если переписать уравнение (2) в эквивалентной форме:

$$\left(\frac{p_{tt}}{\delta_t}\right)_t + \delta_t p_t - \frac{U_0^2}{2}\left(\frac{1-8p+12p^2}{\delta_t}\right)_t = 0. \qquad (12)$$

Легко видеть, что при $\delta_t = \delta_t(p)$ данное уравнение интегрируется, давая

$$p_{tt} + \delta_t(p)\int_{t_0}^{t}\delta_t(p)dp - \frac{U_0^2}{2}(1-8p+12p^2) = C_1\delta_t(p), \quad C_1 = \text{const}, \qquad (13)$$

где теперь для выполнения начальных условий должно быть $C_1 = 0$. Это приводит к решению вида [ср. с (7)]

$$t - t_0 = \int\frac{dp}{\sqrt{-2Q(p)+U_0^2(p-4p^2+4p^3)}}, \quad Q(p) = \int_{t_0}^{t}\delta_t(p)\left(\int_{t_0}^{t}\delta_t(p)dp\right)dp. \qquad (14)$$

Как хорошо известно, если $Q(p)$ по p является полиномом третьей или четвертой степени, то решение $p(t)$ выражается через эллиптические функции [6] и представляет собой, в общем случае, периодическую функцию времени. Следовательно, модуляция соответствующей расстройки $\delta_t = \delta_t(p)$ задает модель с *периодическими* пересечениями термов. Подбирая разные функции $Q(p)$, можно вывести ряд подобных моделей.

Как непосредственно видно из уравнений (14) и (7), у этих моделей много общего с вышеприведенным решением Раби. [В определенном смысле модель Раби также может быть включена в рассматриваемый список в качестве частного предельного случая (он соответствует выбору $Q(p) = \delta_0^2 p^2/2$)]. Например, если

$$U = U_0 = \text{const}, \ \delta_t = \delta_1\sqrt{p}, \qquad (15)$$

то тогда $Q(p) = 2\delta_1^2 p^3 / 9$ и решение будет задаваться формулой

$$p = b\,\mathrm{sn}^2\left[\frac{1}{2\sqrt{b}}U_0(t-t_0); m\right], \tag{16}$$

где

$$m = -\frac{b}{a} = \frac{3-\delta_1/U_0}{3+\delta_1/U_0}, \tag{17}$$

$$a, b = \frac{3}{2(\delta_1/U_0 \mp 3)}. \tag{18}$$

[Интересно, что при $\delta_1 = 3U_0$ $(m=0) \Leftrightarrow \delta_t = 3U_0 \sin[U_0(t-t_0)]$ решение выражается через элементарные функции: $p = \sin^2[U_0(t-t_0)/4]$]. Видно, что у этого решения, действительно, та же структура, что и у решения Раби (8). И в пределе сильной связи мы имеем ту же предельную функцию (11). Так как период и амплитуда лазерного поля не являются независимыми, то очевидно, что представленные модели с периодическими пересечениями являются несколько вырожденными. И все же они могут быть полезными при построении решений невырожденных задач методами теории возмущений.

3. Общий случай

Рассмотрим теперь предел сильного взаимодействия в общем случае, когда δ_t не есть постоянная, так что $\delta_{tt} \neq 0$. Учитываая порядки членов, входящих в (3), сохраним в этом уравнении два последних слагаемых:

$$\left[\delta_t^2 + 4U_0^2(1-3p)\right]p_t + \frac{U_0^2}{2}\frac{\delta_{tt}}{\delta_t}\left(1-8p+12p^2\right) = 0. \tag{19}$$

Простое, на первый взгляд, это уравнение, однако, обладает богатой структурой. У него два тривиальных решения: p=1/6 и p=1/2. Эти решения, играющие важную роль в установлении асимптот, представляют собой стационарные решения уравнения (3). Общее решение уравнения (19), зависящее от некоторой произвольной постоянной C, довольно сложное. Выбором различных значений постоянной получаются различные решения. Рассмотрим, например, случай первой экспоненциальной модели пересечения термов Никитина

$$\delta_t = \Delta(1-e^{-at}). \tag{20}$$

Здесь точка пересечения термов перенесена в начало координат. Как видно, в этой области функция модуляции расстройки ведет себя как линейная функция Ландау–Зинера: $\delta_t \approx \Delta a t$. В качестве эффективного параметра Ландау–Зинера здесь выступает $\lambda_{\mathrm{eff}} = 2U_0^2/|a\Delta|$. С другой стороны, при $t \gg 1\ a$ ($a > 0$) расстройка практически постоянна. Следовательно, можно ожидать, что эта модель будет проявлять черты обеих моделей – Ландау–Зинера и Раби.

Для функции модуляции расстройки (20) предельное уравнение (19) примет вид

$$\left[\Delta^2(1-e^{-at})^2+4U_0^2(1-3p)\right]p_t+\frac{U_0^2}{2}\frac{a}{(e^{at}-1)}(1-8p+12p^2)=0\,. \qquad (21)$$

Соответствующее решение этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $p(-\infty)=0$, записывается как

$$p_0=\frac{1}{6}+\frac{(1-e^{-at})}{18U_0^2/\Delta^2}\left((1-e^{-at})+\sqrt{(1-e^{-at})^2+\frac{6U_0^2}{\Delta^2}}\right). \qquad (22)$$

Это решение показано на рис.2 наряду с соответствующим численным решением. Как видно, согласие в нулевом приближении хорошее.

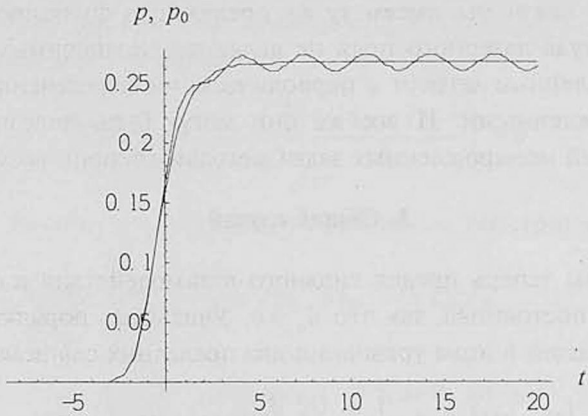

Рис.2. Первая экспоненциальная модель Никитина: вероятность перехода при $U_0^2/\Delta^2=4$; монотонная кривая – решение (22).

Конечная вероятность перехода есть

$$p_0(+\infty)=\frac{1}{6}+\frac{\Delta^2}{18U_0^2}\left(1+\sqrt{1+\frac{6U_0^2}{\Delta^2}}\right). \qquad (23)$$

Это – монотонно убывающая функция от параметра U_0^2/Δ^2. Начиная от $U_0^2/\Delta^2=4/3$, она меньше 1/3. Как видно, при $U_0^2\to\infty$ конечная вероятность стремится к значению 1/6 (всегда оставаясь больше 1/6). [Напомним, что 1/6 есть одно из стационарных решений уравнения (3).]

Это довольно неожиданное поведение, поскольку в случае Ландау–Зинера мы имеем нормальный интуитивный предел $p_{0LZ}(\lambda\to\infty)=1/2$, Очевидно, что это следствие ограниченности конечного значения расстройки Δ в модели (20). Такая ограниченная расстройка стремится вызвать осцилляции Раби, которые, взаимодействуя с нелинейными членами уравнения (3), подавляют заселение второго состояния. Непосредственный вывод из этих наблюдений состоит в том, что предел сильного взаимодействия не оптимален

для перехода в молекулярное состояние, когда имеем дело с ограниченной конечной расстройкой поля. Очевидно, что для любого заданного Δ должна существовать некоторая оптимальная интенсивность поля $U_0^2 = U_0^2(\Delta)$, при которой переход в молекулярное состояние максимален.

4. Заключение

В заключение отметим, что мы представили анализ режима сильной нелинейности для моделей пересечения термов для нелинейной версии двухуровневой задачи, возникающей при рассмотрении фотоассоциации атомарного Бозе-Эйнштейновского конденсата. Показано, что в пределе сильного взаимодействия, когда нелинейность выражена сильнее всего, определяющие уравнения можно эффективным образом заменить на некоторое нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка. Получено общее решение этого уравнения.

Мы проанализировали модель пересечения термов Никитина и показали, что из-за наличия ограниченной конечной расстройки лазерного поля в пределе больших интенсивностей конечная вероятность перехода стремится к 1/6. Таким образом, предел сильного взаимодействия в данном случае не оптимален для образования молекул.

Работа выполнена при поддержке грантов Фонда Гражданских Исследований и Разработок США No. NFSAT PH 100-02 и PA No. 0591-2002.

ЛИТЕРАТУРА

1. **M.Kostrun, M.Mackie, R.Cote**, and **J.Javanainen**. Phys. Rev. A, **62**, 063616 (2000); **M.Mackie** and **J.Javanainen**. Phys. Rev. A, **60**, 3174 (1999).
2. **А.М. Ишханян, Г.П. Черников**. Изв. НАН Армении, Физика, **39**, 3 (2004).
3. **F.G.Tricomi**. Integral Equations. New York, Dover, 1985; **R.K.Miller**. Nonlinear Volterra Integral Equations. New York, Benjamin, 1971.
4. **А.М. Ишханян**. Доклады НАН Армении, **104**, 132 (2004).
5. **Е.Е.Никитин**. Оптика и спектроскопия, **13**, 761 (1962); **E.E.Nikitin**, Discuss. Faraday Soc., **33**, 14 (1962).
6. **M.Abramowitz** and **I.A.Stegun**. Handbook of Mathematical Functions. New York, Dover, 1965.
7. **A.M.Ishkhanyan, M.Mackie, Ph.Gould**, and **J.Javanainen**. Interactions in Ultracold Gases: From Atoms to Molecules (eds. M.Weidemuller and C.Zimmerman). Berlin, Wiley, p.470, 2003.

STRONG COUPLING LIMIT IN THE PHOTOASSOCIATION OF COLD ATOMS

A.M. ISHKHANYAN

The strong coupling limit for a model nonlinear two state problem describing the photoassociation of an atomic Bose-Einstein condensate is considered. For the class of term-crossing models with constant external field amplitude a general strategy for attacking the problem is developed based on the reduction of the initial system of equations for the semi-classical atom-molecule amplitudes to a third order non-linear differential equation which in the general case of variable detunings is further reduced to a limit first-order nonlinear equation.