Известия НАН Армении, Физика, т.39, №1, с.3-10 (2004)

УДК 535.016

ПРЕДЕЛ СЛАБОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В ТЕОРИИ ФОТОАССОЦИАЦИИ ХОЛОДНЫХ АТОМОВ

А.М. ИШХАНЯН[1], Г.П. ЧЕРНИКОВ[2]

[1]Инженерный центр НАН Армении, Аштарак, Армения

[2]РНЦ "Курчатовский Институт", Институт Ядерного Синтеза, Москва, Россия

(Поступила в редакцию 1 августа 2003 г.)

Изучена определенная базовая модель нелинейной двухуровневой задачи, типовой для классических и бозонных теорий поля с кубической нелинейностью. В качестве конкретного примера рассмотрена фотоассоциация атомарного Бозе-Эйнштейновского конденсата. Для классов моделей с постоянной амплитудой внешнего поля разработана общая стратегия решения задачи, основанная на сведении начальной системы уравнений для полуклассических амплитуд вероятностей атомарного и молекулярного состояний к определенному нелинейному интегральному уравнению Вольтерра для вероятности молекулярного состояния.

1. Введение

При изучении фотоассоциации [1] Бозе-Эйнштейновского конденсата [2] рассматривается следующая система полуклассических нелинейных уравнений, описывающих атомарный и молекулярный конденсаты в виде классических полей:

$$i\frac{da_1}{dt} = U(t)\,e^{-i\delta(t)}\,a_2 a_1^*\,,$$
$$i\frac{da_2}{dt} = \frac{U(t)}{2}\,e^{i\delta(t)}\,a_1 a_1\,. \qquad (1)$$

Здесь a_1 и a_2 являются амплитудами, соответственно, атомарного и молекулярного состояний, $U=U(t)$ – частота Раби, а $\delta=\delta(t)$ – функция модуляции расстройки лазерного поля от частоты перехода. Те же самые уравнения встречаются при контроле длины рассеяния Бозе-Эйнштейновского конденсата посредством Фешбах-резонанса, в задачах нелинейной оптики при генерации второй гармоники, и, вообще, в полевых теориях, где гамильтониан системы имеет типичный вид $a_2^+ a_1 a_1$.

Важным общим свойством системы (1) является то, что, как и в линейном случае, решения данной системы образуют определенный *класс* [3], в чем можно легко убедиться непосредственной проверкой. Это свойство позволяет записать решение для любого члена класса через решение, написанное для определенного основного представителя этого класса. Такого рода свойство, следовательно, позволяет сократить количество разных рассматриваемых моделей до небольшого количества моделей.

Исключение a_1 из системы (1) приводит к нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка для a_2:

$$\frac{d^2 a_2}{dt^2}+\left(-i\delta_t-\frac{U_t}{U}\right)\frac{da_2}{dt}+U^2(1-2|a_2|^2)\,a_2=0\,, \tag{2}$$

где U предполагается вещественным.

Система (1) обладает первым интегралом

$$|a_1|^2+2|a_2|^2=I_N=\mathrm{const}\,. \tag{3}$$

Нас интересуют решения, которые принадлежат к многообразию I_N=1 и определяются начальными условиями $|a_1(-\infty)|^2=1$, $|a_2(-\infty)|^2=0$. Такая нормировка уже учтена в уравнении (2).

Начальное интуитивное представление о решении задачи может быть получено, исходя из рассмотрения уравнения (2). Как видно, нелинейность имеет локальный характер, т.е. она определяется текущим значением вероятности перехода $p(t)$. Следовательно, можно ожидать, что, если $p(t)$ будет оставаться достаточно малой (заметим, что из-за условия нормировки (3) значение p никогда не превышает 1/2), то роль нелинейности окажется ограниченной. В этом случае, пренебрегая нелинейным членом в уравнении (3), мы получим линейное уравнение, которому удовлетворяет, с точностью до коэффициента, решение линейной задачи. Решение же линейной задачи подсказывает, что нелинейный член все время остается малым, если вероятность заселения второго состояния, вычисленная исходя из линейного решения, мала. Это имеет место, когда интенсивность внешнего поля мала. Таким образом, можно заключить, что в пределе слабого взаимодействия решение нелинейной задачи должно быть близко к промасштабированному решению линейной задачи.

Общие рассуждения, приведенные выше, далее подкрепляются численным счетом, который показывает, что в режиме слабого взаимодействия поведения решений нелинейной и линейной задач действительно довольно схожи. Например, в задаче Ландау–Зенера [4] $(U(t)=U_0,\ \ \delta(t)=\delta_0 t^2)$ численное моделирование, наряду с аналитическими выкладками, выявляет, что в режиме слабого взаимодействия конечную вероятность перехода (при $t\to+\infty$) можно представить в виде [5]

$$p(+\infty)\approx\frac{P_{LZ}(\lambda)}{4}\left(1+\frac{\lambda}{\pi}P_{LZ}(\lambda)\right), \tag{4}$$

где $\lambda=U_0^2/\delta_0$ – параметр Ландау–Зенера.

Рассмотрение структуры формулы (4) могло бы создать ощущение, что нелинейность привносит малое возмущение, так что можно было бы попытаться сконструировать приближенные решения уравнения (2) в виде степенного ряда по U_0^2, взяв в качестве нулевого приближения соответствующее линейное решение. Однако, попытки трактовать нелинейность, пользуясь прямыми методами теории возмущений, терпят неудачу: получающиеся в итоге поправочные члены расходятся. Возможно, что в этом ничего удивительного и нет, если вспомнить опыт, накопленный при изучении нелинейных систем (см., например, [6] и содержащиеся там многочисленные ссылки).

Можно предположить, что расходимость обусловлена чисто фазовыми эффектами, которые не проявляют себя при рассмотрении вероятностей. Одной из возможностей проверки этого предположения является обращение к уравнению, содержащему лишь вероятность p. В итоге мы получим некоторое дифференциальное уравнение третьего порядка. В случае постоянной амплитуды поля, U=U_0=const, интересующее нас уравнение для молекулярного состояния имеет вид

$$p_{ttt} - \frac{\delta_{tt}}{\delta_t} p_{tt} + \left[\delta_t^2 + 4U_0^2(1-3p)\right] p_t + \frac{U_0^2}{2}\frac{\delta_{tt}}{\delta_t}\left(1-8p+12p^2\right) = 0 . \qquad (5)$$

Однако, можно убедиться, что мы здесь вновь наталкиваемся на те же трудности с расходимостью. И все же, выражение (4) наводит на мысль, что в пределе слабого взаимодействия, когда нелинейный член представляет слабое *регулярное* возмущение [6], должно быть возможным применение некоторых простых методов теории возмущений. В следующем разделе мы продемонстрируем, что это действительно имеет место. Мы выведем некоторое нелинейное интегральное уравнение Вольтерра [7], эквивалентное уравнению (5), которое позволяет избавиться от упомянутой расходимости и построить окончательное решение в виде сходящегося ряда для случая малых интенсивностей внешнего поля. Примечательно, что такая редукция возможна для всех подобных моделей с постоянной амплитудой поля. Следовательно, представленный подход может служить общей стратегией при решении аналогичных нелинейных двухуровневых задач.

2. Нелинейное интегральное уравнение Вольтерра

В качестве первого шага обратимся к модулю и аргументу переменных, вовлеченных в систему (1): $a_{1,2}(t) = r_{1,2}(t)e^{i\theta_{1,2}(t)}$. Взяв квадрат модуля во втором уравнении, легко получить следующее соотношение:

$$\left(\frac{dr_2}{dt}\right)^2 + r_2^2\left(\frac{d\theta_2}{dt}\right)^2 = \frac{U^2}{4}(1-2r_2^2)^2 . \qquad (6)$$

В случае постоянной амплитуды поля, $U=U_0=\mathrm{const}$, обозначая $p = r_2^2$ и $q = 2r_2^2 d\theta_2 / dt$, из уравнений (2) и (6) можно получить следующую систему:

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)^2 + q^2 = U_0^2 (1-2p)^2 p, \quad \frac{dq}{dt} = \delta_t \frac{dp}{dt}. \tag{7}$$

Напишем для сравнения соответствующие уравнения для линейного случая:

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)^2 + q^2 = U_0^2 (1-4p) p, \quad \frac{dq}{dt} = \delta_t \frac{dp}{dt}. \tag{8}$$

Заметим, что уравнения (7) и (8) довольно удобны для генерации ряда точно решаемых моделей как для линейной, так и для нелинейной задач. Некоторые примеры представлены в работе [8].

После дифференцирования и некоторых несложных преобразований первое уравнение (7) может быть представлено в виде

$$\frac{d^2 q}{dt^2} - \frac{\delta_{tt}}{\delta_t}\frac{dq}{dt} + \delta_t^2 q = \frac{U_0^2 \delta_t}{2}(1 - 8p + 12p^2). \tag{9}$$

Общее решение однородного уравнения (т. е. с нулевой правой частью) находится легко:

$$q = C_1 \cos(\delta(t)) + C_2 \sin(\delta(t)). \tag{10}$$

Вронскиан $q_1 q_{2t} - q_2 q_{1t}$, соответствующий фундаментальным решениям $q_1 = \cos(\delta)$ и $q_2 = \sin(\delta)$, просто равен δ_t, так что общее решение полного неоднородного уравнения запишется в виде

$$\begin{aligned} q = {} & \cos(\delta(t))\left(C_1 - \int_{-\infty}^{t} \sin(\delta(x)) \frac{U_0^2}{2}\left(1 - 8p + 12p^2\right) dx\right) + \\ & + \sin(\delta(t))\left(C_2 + \int_{-\infty}^{t} \cos(\delta(x)) \frac{U_0^2}{2}\left(1 - 8p + 12p^2\right) dx\right), \end{aligned} \tag{11}$$

где аргумент подынтегрального выражения изменен на x. В силу соотношения $dq/dt=\delta_t\, dp/dt$ дифференцирование этого уравнения ведет к интегральному уравнению для $p(t)$, а именно:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} = {} & -C_1 \sin(\delta) + C_2 \cos(\delta) + \cos(\delta) \int_{-\infty}^{t} \cos(\delta) \frac{U_0^2}{2}(1 - 8p + 12p^2) dx + \\ & + \sin(\delta) \int_{-\infty}^{t} \sin(\delta) \frac{U_0^2}{2}(1 - 8p + 12p^2) dx. \end{aligned} \tag{12}$$

Поскольку ищется решение, удовлетворяющее начальному условию $p(-\infty)=0$, постоянные C_1 и C_2 на самом деле исчезают.

Таким образом, уравнение для вероятности перехода есть

$$\frac{dp}{dt}=\frac{U_0^2}{4}\left\{\cos(\delta)\int_{-\infty}^{t}\cos(\delta)(1-8p+12p^2)dx+\sin(\delta)\int_{-\infty}^{t}\sin(\delta)(1-8p+12p^2)dx\right\}. \quad (13)$$

Естественно, что и с линейной системой может быть выполнена аналогичная процедура по переходу к интегральному уравнению. В результате получится уравнение, в котором члены, пропорциональные p^2, будут отсутствовать.

Проинтегрировав теперь уравнение (13), мы получим

$$p(t)=\frac{U_0^2}{2}\int_{-\infty}^{t}\cos(\delta(x))\left(\int_{-\infty}^{x}\cos(\delta(y))(1-8p(y)+12p^2(y))dy\right)dx+$$
$$+\frac{U_0^2}{2}\int_{-\infty}^{t}\sin(\delta(x))\left(\int_{-\infty}^{x}\sin(\delta(y))(1-8p(y)+12p^2(y))dy\right)dx. \quad (14)$$

Наконец, интегрирование по частям ведет к нелинейному интегральному уравнению Вольтерра второго рода [7]

$$p(t)=\frac{\lambda}{2}\int_{-\infty}^{t}K(t,x)\left(1-8p(x)+12p^2(x)\right)dx, \quad (15)$$

где λ является "параметром Ландау–Зенера", определяемым как $\lambda=U_0^2\tau_0^2$ (здесь τ_0 – временной масштаб, определяемый масштабным преобразованием $t\to\tau_0 t$; в случае модели Ландау–Зенера $\delta=\delta_0 t^2$, $\tau_0=1/\sqrt{\delta_0}$), а ядро $K(t,x)$ задается формулой

$$K(t,x)=\left(C_\delta(t)-C_\delta(x)\right)\cos(\delta(x))+\left(S_\delta(t)-S_\delta(x)\right)\sin(\delta(x)), \quad (16)$$

с функциями C_δ и S_δ, определяемыми как

$$C_\delta(t)=\int_{-\infty}^{t}\cos(\delta(x))dx, \quad S_\delta(t)=\int_{-\infty}^{t}\sin(\delta(x))dx. \quad (17)$$

Дифференцированием легко можно проверить, что полученное интегральное уравнение (15) эквивалентно дифференциальному уравнению третьего порядка (5).

Вынося первое слагаемое из подынтегрального выражения (15), приходим к следующему уравнению Вольтерра:

$$p(t)=\frac{\lambda}{4}f(t)-4\lambda\int_{-\infty}^{t}K(t,x)\left(p(x)-\frac{3}{2}p^2(x)\right)dx, \quad (18)$$

где вынуждающая функция $f(t)$ [7] имеет вид

$$f(t)=C_\delta^2(t)+S_\delta^2(t). \quad (19)$$

Если теперь вынуждающая функция $f(t)$ и ядро $K(t,x)$ ограничены, то можно применить последовательные приближения Пикара

$$p_0 = \frac{\lambda}{4} f(t),\ p_n = \frac{\lambda}{4} f(t) - 4\lambda \int_{-\infty}^{t} K(t,x)\left(p_{n-1} - \frac{3}{2} p_{n-1}^2\right) dx \tag{20}$$

для построения последовательности функций $p_n(t)$, которая, согласно общей теории (см., например, [7]), везде равномерно сходится к предельной функции $p(t)$, которая и является единственным решением уравнения (18). Ввиду того, что используются довольно общие условия, интегральные уравнения Вольтерра (15) или (18) обеспечивают систематичный подход к решению нелинейной системы (1). В случае достаточно малых значений параметра Ландау–Зенера λ формулы (20) дают возможность напрямую построить решение в виде достаточно быстро сходящегося степенного ряда.

3. Структура решения при малых λ

Пусть $\lambda \ll 1$ и сначала рассмотрим степенной ряд $p = p_0 + \lambda p_1 + \lambda^2 p_2 + \ldots$. Понятно, что этот ряд эквивалентен последовательным приближениям Пикара (20). Мы рассматриваем здесь эту форму лишь для того, чтобы в явном виде выделить порядки входящих в решение членов. Подставляя это разложение в уравнение (15) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, мы получим $p_0 = 0$, а затем – последовательно

$$\lambda:\quad p_1 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{t} K(t,x) dx, \quad \lambda^2:\quad p_2 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{t} K(t,x)(-8 p_1) dx\ , \tag{21}$$

$$\lambda^3:\quad p_3 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{t} K(t,x)\left(-8 p_2 + 12 p_1^2\right) dx\ \ldots \tag{22}$$

Естественно, что λp_1 является вынуждающей функцией уравнения Вольтерра (18):

$$p_1 = \frac{C_\delta^2(t) + S_\delta^2(t)}{4} = \frac{f(t)}{4}. \tag{23}$$

Аналогичным образом можно вычислить следующие члены разложения. Однако, следует отметить, что предложенная процедура дает чересчур медленное схождение. Это можно понять, если обратить внимание на то, что $p_1 \to \pi/4$ при $t \to +\infty$, так что λp_1, начиная с $\lambda \approx 0.65$, уже превышает максимальное значение 1/2, допускаемое нормировкой (3).

Предпочтительнее иной подход. Заметим, что p_0, p_1 и p_2 удовлетворяют тем же уравнениям, что и соответствующие члены разложения в линейном случае. Это обстоятельство подсказывает применить к начальному интегральному уравнению (15) подстановку $p = p_L + u$. Тогда мы получим

$$p_L + u = \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{t} K(t,x)[1 - 8(p_L + u) + 12(p_L + u)^2]\,dx \,. \qquad (24)$$

Зануляя слагаемые, относящиеся к линейной задаче, придем к новому уравнению Вольтерра Хаммерштейновского типа [7]

$$u = 6\lambda \int_{-\infty}^{t} K(t,x) p_L^2\,dx - 4\lambda \int_{-\infty}^{t} K(t,x)[(1 - 3p_L)u - \frac{3}{2}u^2]\,dx \qquad (25)$$

с видоизмененной вынуждающей функцией, которая теперь порядка λ^3. Понятно тогда, что эта вынуждающая функция будет обеспечивать намного более быстрое схождение аппроксимаций. Действительно, испробуем теперь разложение вида

$$u = u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \lambda^3 u_3 + \ldots . \qquad (26)$$

Поскольку $p_L \sim \lambda$ для малых λ, то можно заключить, что $u_0 = u_1 = u_2 = 0$. Однако для следующего слагаемого получается важный результат:

$$\lambda^3 u_3 = 6\lambda \int_{-\infty}^{t} K(t,x) p_L^2(x)\,dx \,. \qquad (27)$$

Замечая, что $u = \lambda^3 u_3 + O(\lambda^4)$, мы приходим к основному результату:

$$u \approx 6\lambda \int_{-\infty}^{t} K(t,x) p_L^2\,dx \,. \qquad (28)$$

Это и есть искомая форма первого приближения. Таким образом, мы получаем окончательно, что решение нелинейной задачи фотоассоциации в режиме слабого взаимодействия записывается в первом приближении в виде

$$p(t) = p_L(t) + 6\lambda \int_{-\infty}^{t} K(t,x) p_L^2(x)\,dx \,. \qquad (29)$$

Численный расчет показывает, что это хорошее приближение. Вплоть до $\lambda < 0.5$, при сравнении с численным решением системы (1) имеет место практическая неразличимость графиков. И в качестве первого приближения оно также хорошо работает вплоть до $\lambda < 1$.

4. Заключение

Таким образом, мы представили анализ базовой нелинейной двухуровневой задачи, которая возникает в разных физических ситуациях, таких, например, как фотоассоциация Бозе–Эйнштейновского конденсата, контроль длины рассеяния атомарного конденсата посредством Фешбах-резонанса, генерация второй гармоники, и вообще, в полевых теориях с кубической нелинейностью. Мы показали, что управляющие уравнения могут быть сведены к нелинейному уравнению Вольтерра, которое позволяет избежать трудностей, связанных с расходимостями, возникающими при попытках применения обычных методов возмущений. Это уравнение позволяет построить решение в виде равномерно сходящегося ряда для случая малых интенсивностей внешнего поля.

Примечательно, что данное сведение начальной двухуровневой задачи к нелинейному интегральному уравнению Вольтерра охватывает все модели с постоянной амплитудой поля. Более того, благодаря вышеупомянутому классовому свойству решений рассмотренной системы, такое сведение может быть распространено также на большинство возможных моделей. Следовательно, разработанный подход приобретает значение общей стратегии для решения аналогичных нелинейных двухуровневых задач. С использованием данного метода можно изучить различные важные модели стандартной линейной теории.

Работа выполнена при поддержке грантов Фонда Гражданских Исследований и Разработок США (CRDF) No. NFSAT PH 100-02/12042, Армянского Национального Фонда Науки и Образования (ANSEF) No. PS13 и PA No. 0591-2002.

ЛИТЕРАТУРА

1. **J.Javanainen** and **M.Mackie**. Phys. Rev. A, **59**, R3186 (1999); **M.Kostrun, M.Mackie, R.Cote**, and **J.Javanainen**. Phys. Rev. A, **62**, 063616 (2000).
2. **M.H.Anderson** et al. Science, **269**, 198 (1995); **K.B.Davis et al.** Phys. Rev. Lett., **75**, 3969 (1995).
3. **A.M.Ishkhanyan.** J. Phys. A, **33**, 5539 (2000); **A.M.Ishkhanyan.** Opt. Commun., **176**, 155 (2000).
4. **L.D.Landau.** Phys. Z. Sowjetunion, **2**, 46 (1932); **C. Zener.** Proc. R. Soc. (London) A, **137**, 696 (1932).
5. **A.M.Ishkhanyan, M.Mackie, A.Carmichael, Ph. Gould**, and **J. Javanainen.** Phys. Rev. A, **69** (2004) (in press).
6. **A.H.Nayfeh.** Perturbation Methods. New York, Wiley-Interscience, 1985.
7. **F.G.Tricomi.** Integral Equations. New York, Dover Publications, 1985; **H.Brunner and P.J.van der Houwen.** The Numerical Solution of Volterra Equations. Amsterdam, North Holland, 1986; **R.K.Miller.** Nonlinear Volterra Integral Equations. New York, Benjamin, 1971.
8. **A.M.Ishkhanyan, M.Mackie, Ph.Gould, and J.Javanainen.** In Interactions in Ultracold Gases: From Atoms to Molecules (eds. M.Weidemuller and C.Zimmerman). Berlin, Wiley, p.470, 2003.

WEAK INTERACTION LIMIT IN THE THEORY OF PHOTOASSOCIATION OF COLD ATOMS

A.M. ISHKHANYAN, G.P. CHERNIKOV

A basic model for the nonlinear two-state problem generic for classical and bosonic field theories with a cubic nonlinearity is studied. As a specific example, the photoassociation of an atomic Bose-Einstein condensate is considered. For the classes of models with constant external field amplitude a general strategy for solving the problem is developed based on the reduction of the initial system of equations for the semi-classical probability amplitudes of atomic and molecular states to a nonlinear Volterra integral equation for the molecular state probability.