Известия НАН Армении, Физика, т.38, №6, с.390-395 (2003)

УДК 535.14

ПЕРЕХОД ОТ РЕГУЛЯРНОЙ К ХАОТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКЕ В ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ОСЦИЛЛЯТОРЕ

Н.Т. ГЕВОРГЯН[1], Г.Ю. КРЮЧКЯН[1,2]

[1]Институт физических исследований НАН Армении

[2]Ереванский государственный университет

(Поступила в редакцию 25 марта 2003 г.)

Предложена схема оптического параметрического осциллятора, показывающая переход от регулярной к хаотической динамике. Исследованы режимы генерации системы на основе интенсивностей мод и сечения Пуанкаре в фазовом пространстве. Продемонстрировано возникновение странного аттрактора в хаотическом режиме.

1. Введение

В последние годы в ряде экспериментальных и теоретических работ продемонстрирована возможность исследования квантового хаоса в области квантовой оптики [1-4]. Большая часть результатов в этом направлении получена для модели возмущенного ротатора. В частности, эта модель реализована на эксперименте для ультрахолодных атомов в магнитно-оптической ловушке под действием периодической последовательности импульсов стоячих электромагнитных волн [1,2]. Недавно новые проблемы хаотической динамики были исследованы в экспериментальной схеме с охлажденными атомами в магнитно-оптической ловушке, имеющей форму потенциала с двумя минимумами [3]. Эффект квантового туннелирования в хаотическом режиме исследован в эксперименте с атомами цезия (Cs) в стоячей волне с амплитудной модуляцией [4]. В работах [5,6] предложен другой тип квантовых систем с хаотической динамикой на основе модели ангармонического осциллятора под действием двух периодических сил с различными частотами. Важным итогом этих исследований является вывод, что суб-пуассоновская статистика чисел заполнения осциллятора реализуется в случае диссипативной хаотической динамики.

В настоящей работе предлагается новая модель в области квантовой оптики, в которой имеет место переход от регулярной динамики к хаотической. Рассматриваемая модель является обобщением модели оптического параметрического осциллятора (ОПО) и основана на трехволновом параметрическом взаимодействии в нелинейной $\chi^{(2)}$ среде, помещенной в двухмодовый резонатор под действием двух лазерных полей с различными частотами. Основная мотивация для такого исследования следующая. Как известно, обычный невырожденный параметрический осциллятор, который возбуждается когерентным лазерным полем, является одной из основных схем для генерации неклассических состояний света, в частности, перепутанных состояний с непрерывными переменными [7,8]. В случае действия двух возбуждающих лазерных полей, как показано ниже, параметрический осциллятор имеет наряду с регулярной также режим хаотической динамики. Поэтому следует ожидать, что рассматриваемая модель позволит исследовать проблемы неклассических состояний света при переходе от регулярной к хаотической динамике.

2. Параметрический осциллятор под действием двух монохроматических полей

Гамильтониан, описывающий параметрическое взаимодействие двух мод одинаковых поляризаций с частотами ω_c и $\omega_a = \omega_c/2$ с фазовым синхронизмом I-го рода в резонаторе, имеет следующий вид:

$$H = i\hbar c\left(\Omega_1^* e^{i\omega_1 t} + \Omega_2^* e^{i\omega_2 t}\right) + i\hbar\chi c\left(a^+\right)^2 + \text{H.c.} \qquad (1)$$

Здесь c и a есть операторы мод с частотами ω_c и ω_a, соответственно, χ – постоянная связи для процесса $\omega_c \to \omega_a + \omega_a$ расщепления моды на две моды одинаковых частот и поляризаций, Ω_1 и Ω_2 – частоты Раби, описывающие взаимодействие двух лазерных полей с частотами ω_1 и ω_2 с модой ω_c.

Система является диссипативной, так как субгармоники ω_a, ω_c затухают в резонаторе с коэффициентами затухания γ_a, γ_c. Поэтому эволюцию системы можно описать следующим уравнением для матрицы плотности двух мод:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{i}{\hbar}\left[H_0 + H_{\text{int}}, \rho\right] + \sum_{i=1,2}\left(L_i\rho L_i^+ - \frac{1}{2}\rho L_i^+ L_i - \frac{1}{2}L_i^+ L_i\rho\right). \qquad (2)$$

Уравнение (2) записано в представлении взаимодействия и в резонансном приближении, где

$$H_0 = \hbar\left(\Delta_a a^+ a + \Delta_c c^+ c\right), \qquad (3)$$

$$H_{\text{int}} = i\hbar\left(\Omega_1^* + \Omega_2^* e^{i\delta t}\right)c + i\hbar\chi c\left(a^+\right)^2 + \text{H.c.}, \qquad (4)$$

$\Delta_a \neq \Delta_c$ – расстройки частот резонатора и $\delta = \omega_2 - \omega_1$ – модуляционная частота. Диссипация системы описывается так называемыми операторами Линдблада $L_1 = \sqrt{2\gamma_a}\,a$, $L_2 = \sqrt{2\gamma_c}\,c$. Следует отметить, что уравнение (2) является стандартным для описания диссипативной квантовой динамики в случае слабой связи системы с резервуаром (см., например, [9,10]).

При $\Omega_2 = 0$ уравнение (2) описывает обычный параметрический осциллятор под действием монохроматического возмущения, который имеет стационарное поведение при временах, превышающих длительность переходного режима, $t \gg \gamma_a^{-1}$, γ_c^{-1}. В случае наличия двух монохроматических полей возбуждения гамильтониан (4) зависит от времени, следовательно, можно ожидать, что система имеет области регулярной и хаотической динамики в зависимости от параметров Δ_a, Δ_c, χ, Ω_1, Ω_2 и δ.

В настоящей статье мы ограничимся исследованием только лишь режимов генерации ОПО и продемонстрируем появление странного аттрактора, характеризующего диссипативный хаос. С этой целью мы используем уравнения для амплитуд субгармоник $\alpha = \mathrm{Tr_a}(\rho_a a)$, $\beta = \mathrm{Tr_c}(\rho_c c)$, где матрицы плотности каждой из мод равны $\rho_a = \mathrm{Tr_c}(\rho)$, $\rho_c = \mathrm{Tr_a}(\rho)$ в полуклассическом приближении. Учитывая, что в этом приближении средние от произведений операторов расщепляются и, в частности, имеем $\mathrm{Tr}(\rho a^+ c) = \alpha^* \beta$, приходим к уравнениям в следующей форме:

$$
\begin{aligned}
\frac{d\alpha}{dt} &= -(\gamma_a + i\Delta_a)\alpha + 2\chi\beta\alpha^*, \\
\frac{d\beta}{dt} &= -(\gamma_c + i\Delta_c)\beta - \chi^*\alpha^2 - \left(\Omega_1 + \Omega_2 e^{-i\delta t}\right).
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Уравнения (5) не допускают аналитического решения и будут проанализированы численно. Легко заметить, что эти уравнения остаются инвариантными при масштабных преобразованиях $\alpha \to \alpha' = \lambda\alpha$, $\beta \to \beta' = \lambda\beta$, где λ – положительный, безразмерный множитель, если параметры χ, Ω_i $(i = 1,2)$ преобразуются как $\chi \to \chi' = \chi/\lambda$, $\Omega_i \to \Omega_i' = \lambda\Omega_i$. Это свойство масштабной инвариантности ОПО полезно при нахождении областей регулярной и хаотической динамики.

3. Переход к хаотической динамике

Рассмотрим переход от регулярной к хаотической динамике при изменении частоты Раби Ω_2. При $\Omega_2 = 0$, т.е. для случая монохроматического возбуждения ОПО, система достигает стационарного режима для временных интервалов, превосходящих характерное время переходных процессов, при $t \gg \max(\gamma_c^{-1}, \gamma_a^{-1})$. Как следует из анализа условий стабильности стационарных решений уравнений (5), при $\Omega_1 > \Omega_t$ имеет место надпороговый режим генерации, где $\Omega_t = |\gamma_c\Delta_a + \gamma_a\Delta_c|/2\chi$ – пороговое значение частоты Раби, которая пропорциональна амплитуде поля возбуждения. Система также имеет моностабильное или бистабильное поведение, причем, последнее осуществляется при условии $\Delta_c\Delta_a - \gamma_c\gamma_a > 0$, в области параметров $\Omega_t \le \Omega_1 \le \sqrt{\Omega_t^2 + (\Delta_c\Delta_a - \gamma_c\gamma_a)^2/4\chi^2}$.

Очевидно, что ОПО в бихроматическом поле также имеет пороговое поведение, как и в случае монохроматического возбуждения при $\Omega_2 = 0$. На рис.1 приведены интенсивности двух мод $|\alpha|^2$, $|\beta|^2$ в единицах чисел фотонов в области регулярной динамики для следующих значений параметров:

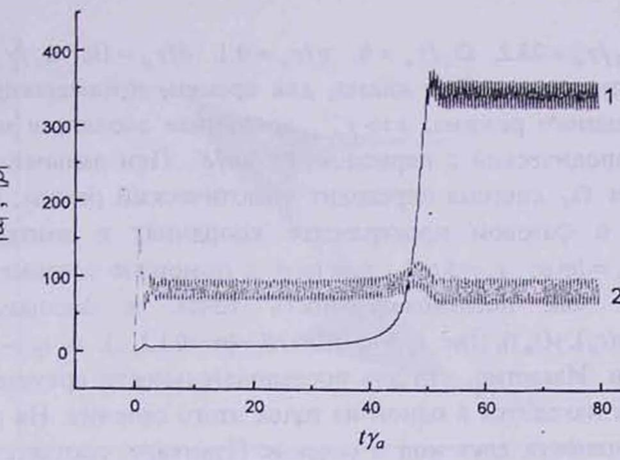
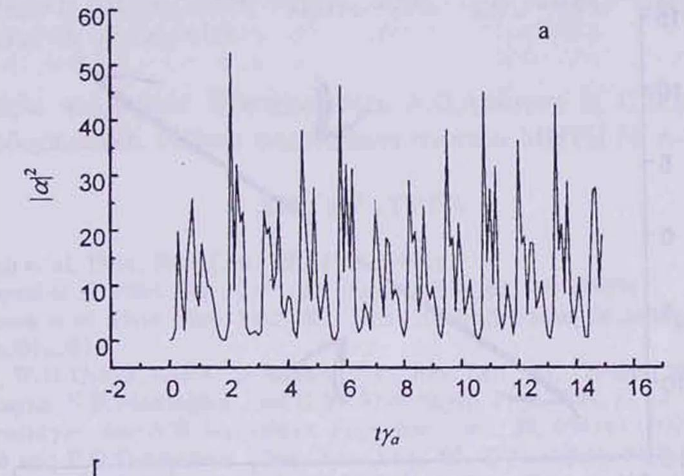


Рис.1. Временная эволюция интенсивностей фундаментальной моды (2) и субгармоники (1) в области регулярной динамики.



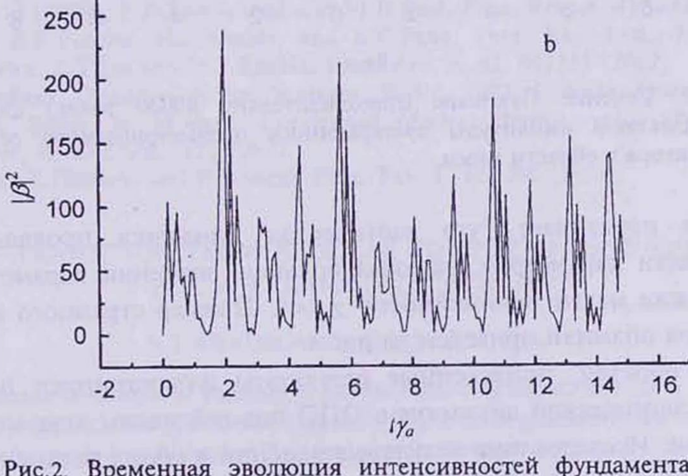


Рис.2. Временная эволюция интенсивностей фундаментальной моды (b) и субгармоники (a) в области хаотической динамики.

$\gamma_c/\gamma_a = 1$, $\Omega_1/\gamma_a = 28.2$, $\Omega_2/\gamma_a = 6$, $\chi/\gamma_a = 0.1$, $\delta/\gamma_a = 10$, $\Delta_c/\gamma_a = 3$, $\Delta_a/\gamma_a = 1.5$ в зависимости от $t\gamma_a$. Как видно, для времен, превышающих характерное время переходного режима, $t >> \gamma_a^{-1}$, временная эволюция мод субгармоник является периодической с периодом $T = 2\pi/\delta$. При дальнейшем увеличении частоты Раби Ω_2 система переходит в хаотический режим, который удобно исследовать в фазовом пространстве координат и импульсов двух мод $x_a = \mathrm{Re}\,\alpha$, $y_a = \mathrm{Im}\,\alpha$; $x_c = \mathrm{Re}\,\beta$, $y_c = \mathrm{Im}\,\beta$ с помощью сечения Пуанкаре. Оно определяется как последовательность точек в фазовом пространстве $(x^{(n)}, y^{(n)}) = (x(t_n), y(t_n))$, где $t_n = t_0 + 2\pi n/\delta$ $(n = 0,1,2,...)$, и t_0 – начальный момент времени. Известно, что для последовательности временных интервалов $t = t_n$ система находится в одной из точек этого сечения. На рис.2 и 3 приведены интенсивности двух мод и сечение Пуанкаре, соответствующие хаотической динамике для следующих значений параметров: $\gamma_c/\gamma_a = 1$, $\Omega_1/\gamma_a = 37$, $\Omega_2/\gamma_a = 37$, $\chi/\gamma_a = 0.7$, $\delta/\gamma_a = 10$, $\Delta_c/\gamma_a = 10$, $\Delta_a/\gamma_a = 5$.

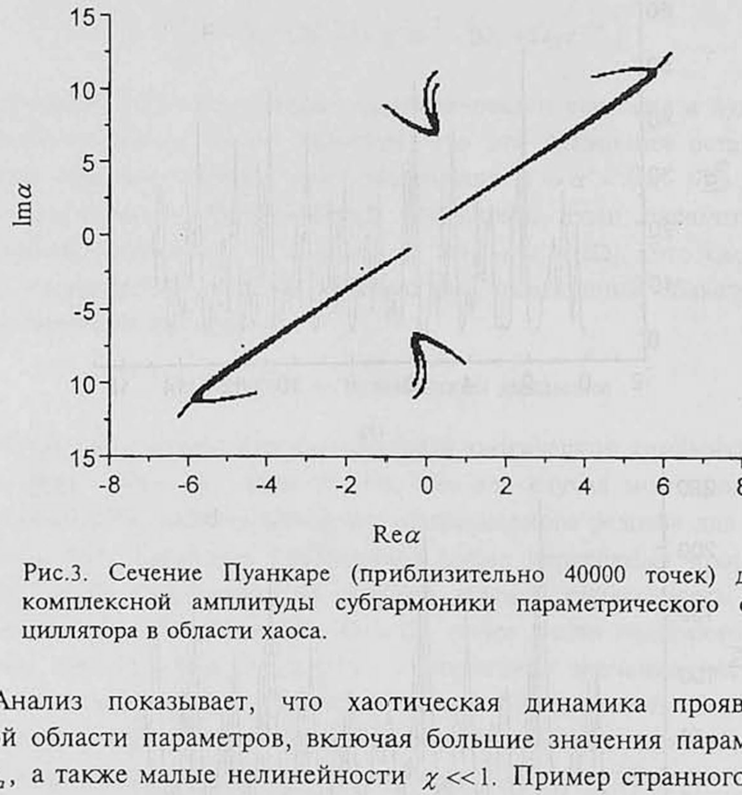


Рис.3. Сечение Пуанкаре (приблизительно 40000 точек) для комплексной амплитуды субгармоники параметрического осциллятора в области хаоса.

Анализ показывает, что хаотическая динамика проявляется для широкой области параметров, включая большие значения параметров Раби $\Omega_i >> \gamma_a$, а также малые нелинейности $\chi << 1$. Пример странного аттрактора в одной из этих областей приведен на рис.4.

Таким образом, приведенные результаты иллюстрируют переход от регулярной к хаотической динамике в ОПО под действием двух монохроматических полей. Исследование квантовых явлений в обоих режимах рассматриваемой системы будет приведено в следующей работе.

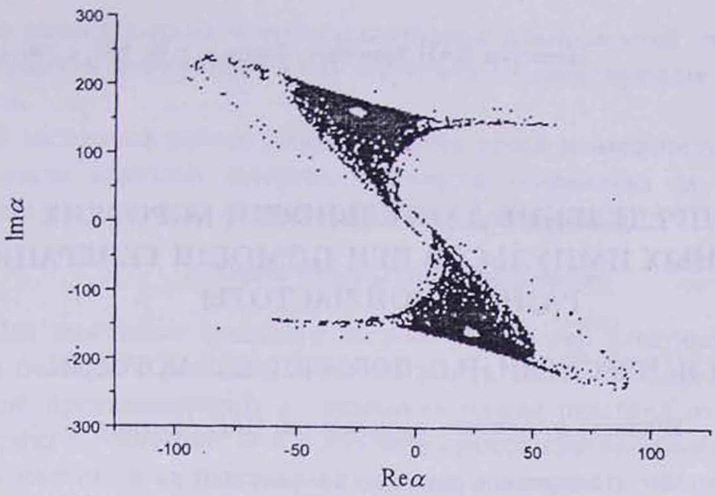


Рис.4. Иллюстрация странного аттрактора для субгармоники (приблизительно 8000 точек) для следующих значений параметров: $\gamma_c/\gamma_a = 1$, $\Omega_1/\gamma_a = 275$, $\Omega_2/\gamma_a = 275$, $\chi/\gamma_a = 0.04$, $\delta/\gamma_a = 10$, $\Delta_c/\gamma_a = 3$, $\Delta_a/\gamma_a = 1.5$.

Авторы выражают благодарность А.О.Адамяну и С.Б.Манвеляну за полезные обсуждения. Работа поддержана грантом МНТЦ № А-823.

ЛИТЕРАТУРА

1. **H.Ammann** et al. Phys. Rev. Lett., **80**, 4111 (1998).
2. **B.G.Klappauf** et al. Phys. Rev. Lett., **81**, 1203 (1998); **82**, 241 (1999).
3. **D.J.Haycock** et al. Phys. Rev. Lett., **85**, 3365 (2000); **S.Ghose, M.Alsing, and I.Deutsch**, quant-ph/010285.
4. **D.A.Stek, W.H.Oskay**, and **M.G.Raizen**. Phys. Rev. Lett., **88**, 120406 (2002).
5. **H.H.Adamyan, S.B.Manvelyan**, and **G.Yu.Kryuchkyan**. Phys. Rev. E, **64**, 046219 (2001).
6. **G.Yu.Kryuchkyan**, and **S.B.Manvelyan**. Phys. Rev. Lett., **88**, 094101 (2002).
7. **M.D.Reid** and **P.D.Drummond.** Phys. Rev. Lett., **60**, 2731 (1988); **M.D.Reid**, Phys. Rev. A, **40**, 913 (1989); **P.D.Drummond** and **M.D.Reid.** Phys. Rev. A, **41**, 3930 (1990).
8. **Z.Y.Ou, S.F.Pereira, H.J.Kimble**, and **K.C.Peng**. Phys. Rev. Lett., **68**, 3663 (1992); **S.F.Pereira, Z.Y.Ou** and **H.J.Kimble**. Phys. Rev. A, 62, 042311 (2002).
9. **C.W.Gardiner.** Quantum Noise. Springer, Berlin, 1992; **U.Weiss.** Quantum Dissipative Systems. Series in Modern Condensed Matter Physics, vol.2 (World Scientific, Singapore, River Edge, NY, 1993).
10. **S.Kohler, T.Dittrich**, and **P.Hanggi**. Phys. Rev. E, **55**, 300 (1997).

TRANSITION FROM REGULAR TO CHAOTIC DYNAMICS FOR A PARAMETRIC OSCILLATOR

N.T. GEVORGYAN, G.YU. KRYUCHKYAN

The scheme of an optical parametric oscillator showing transition from a regular to chaotic dynamics is proposed. The operational regimes of light-mode generation are investigated on the base of both the mode intensities and Poincare section. Strange attractors for chaotic dynamics are studied.