

УДК 548.0

ОПТИКА ОДНООСНЫХ КРИСТАЛЛОВ С ОТКРЫТОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ ВОЛНОВЫХ ВЕКТОРОВ. КОНУС "ОСТАНОВКИ СВЕТА"

О.С. ЕРИЦЯН, О.М. АРАКЕЛЯН

Ереванский государственный университет

(Поступила в редакцию 31 октября 2002 г.)

Рассмотрены оптические свойства кристаллов с разными знаками компонент тензора диэлектрической проницаемости, обусловленные выявленным ранее в работах одного из авторов открытым характером поверхности волновых векторов. В качестве реального объекта рассмотрен кристалл MgF_2 .

1. Введение

В работах [1,2] одного из авторов (О.С.Ерицян) были рассмотрены оптические свойства кристаллов с разными знаками компонент тензора диэлектрической проницаемости ϵ_{ij} . Несмотря на наличие отрицательной компоненты тензора ϵ_{ij} , волна распространяется в среде без затухания. Наличие отрицательной компоненты ϵ_{ij} сказывается в том, что, как показано в этих работах, поверхности волновых векторов (ПВВ), описывающие распространение необыкновенной волны и являющиеся обычно замкнутыми, превращаются в открытые поверхности, а направления распространения, соответствующие отсутствию затухания, заполняют не весь телесный угол 4π , а определенные интервалы телесных углов. Как следствие наличия отрицательной компоненты у ϵ_{ij} , открытыми оказываются, естественно, также характеристические поверхности тензоров ϵ_{ij}^{-1} и ϵ_{ij} ; известный в традиционной кристаллооптике эллипсоид Френеля (характеристическая поверхность тензора ϵ_{ij}) превращается в гиперboloид.

В случае одноосного кристалла ПВВ для необыкновенной волны является однополостным или двухполостным гиперboloидом вращения, в зависимости от того, отрицательна или положительна диэлектрическая проницаемость в направлении, параллельном оптической оси кристалла. Новая форма ПВВ и, конечно, других упомянутых поверхностей, диктует среде совершенно необычные свойства, рассмотренные в [1,2]. Так, превращение ПВВ в гиперboloид приводит к тому, что с приближением направления распространения к направлениям асимптот ПВВ модуль волнового вектора необыкновенной волны стремится к бесконечности. Выявлена особая взаимная

ориентация волнового вектора и вектора Пойнтинга, обуславливающая, в свою очередь, особенности в геометрии отражения и преломления, в угловой зависимости коэффициента отражения, в задаче определения полей при отражении и преломлении на границах пластинки из кристалла с открытой ПВВ. В связи с большими значениями модуля волнового вектора указаны границы применимости построенной теории.

Необычно большие значения модуля волнового вектора означают необычно малые фазовые скорости; это, при неучете дисперсии, тривиально означает также малые групповые скорости. В настоящей работе, следуя [1,2], продолжим исследование оптических особенностей сред с открытой ПВВ. Пункт 2 посвящен исследованию зависимости модуля волнового вектора и фазовой скорости от направления распространения. Изучено влияние поглощения на зависимость действительной и мнимой частей волнового вектора от направления распространения для однородных волн. Показано существование направлений, являющихся образующими конуса, с приближением направления распространения к которым фазовая скорость стремится к нулю (так как модуль волнового вектора стремится к бесконечности [1,2]). В пункте 3 вкратце рассмотрены формы характеристических поверхностей тензоров ϵ_{ij}^{-1} и ϵ_{ij} (эллипсоид Френеля в традиционной кристаллооптике с $\epsilon_{ij} > 0$). В пункте 4 проведено дальнейшее исследование взаимного расположения волнового вектора, вектора Пойнтинга и вектора электрического поля в необыкновенной волне, начатое в [1]. В пункте 5, с учетом дисперсии и поглощения, изучена зависимость групповой скорости от угла, задающего направление распространения.

В недавно вышедших работах [3,4] также сообщается о необычно малой групповой скорости. Однако сходство ситуаций, рассматриваемых в [1,2], с одной стороны, и в [3,4] – с другой, лишь внешнее: эффект в [3,4] – нелинейный.

Исследованию распространения электромагнитной волны в кристалле с разными знаками у компонент тензора диэлектрической проницаемости посвящена также работа [5] (без привлечения понятия ПВВ и характеристических поверхностей тензоров ϵ_{ij} и ϵ_{ij}^{-1}), автору которой, как следует из цитированных в [5] работ, не была известна статья [1].

2. Поверхность волновых векторов. Конус "остановки света"

Дисперсионное уравнение для нормальной волны (с зависимостью полей от $\mathbf{r}$ и t в виде $\exp i(\mathbf{kr} - \omega t)$) в одноосном (с оптической осью z) кристалле имеет следующий вид:

$$\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{xx} \right) \left(\frac{k_x^2 + k_y^2}{\epsilon_{zz}} + \frac{k_z^2}{\epsilon_{xx}} - \frac{\omega^2}{c^2} \right) = 0. \quad (1)$$

Привлечение понятия ПВВ дает уравнению (1) интересный геометри-

ческий смысл, на котором мы здесь вкратце остановимся.

Обычно в кристаллооптике рассматривается случай $\varepsilon_{ij} > 0$. Следуя [1], рассмотрим ситуацию, когда ε_{xx} и ε_{zz} имеют разные знаки. Отрицательность какой-либо компоненты ε_{ij} и, вообще, ее отличие от 1 уже означает, что имеется частотная дисперсия и, следовательно, поглощение. В последующем мы корректно учтем дисперсию и поглощение. Но исследование ПВВ мы проведем здесь без учета поглощения. Это целесообразно для того, чтобы в наиболее "чистом виде" выяснить те особенности, которые вытекают из отрицательности одной из компонент ε_{ij} . При таком подходе последующий учет поглощения яснее выявляет роль поглощения как в образовании формы ПВВ для однородных волн, так и в оптических свойствах рассматриваемых здесь сред вообще.

Если $\varepsilon_{xx} > 0$, $\varepsilon_{zz} < 0$, то ПВВ представляет собой сферу (рис.1, поверхность *a*) и открытую поверхность – гиперboloид вращения (рис.1, поверхность *b*), – вместо обычного для традиционной кристаллоптики эллипсоида. При $\varepsilon_{xx} < 0$, $\varepsilon_{zz} > 0$ сфера превращается в мнимую (нет обыкновенной волны), а вместо изображенного на рис.1 гиперboloида получаем сопряженный последнему гиперboloид.

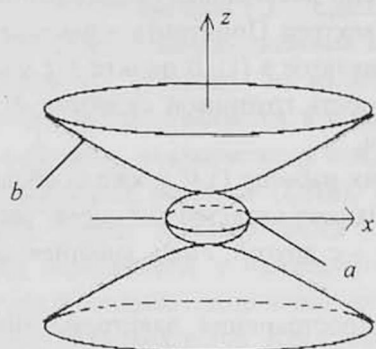


Рис.1. Поверхность волновых векторов в случае, когда отрицательна диэлектрическая проницаемость вдоль оптической оси кристалла.

Области направлений, в которых необыкновенная волна может распространяться, в рассмотренных двух случаях не перекрываются и вместе заполняют весь телесный угол 4π . Это следует из того, что гиперболы, получаемые сечением ПВВ плоскостью, проходящей через ось вращения ПВВ, в случаях $\varepsilon_{zz} > 0$, $\varepsilon_{xx} < 0$ и $\varepsilon_{xx} > 0$, $\varepsilon_{zz} < 0$ – сопряженные.

Можно убедиться, что существование необыкновенной волны в любом из двух случаев $\varepsilon_{xx} > 0$, $\varepsilon_{zz} < 0$ и $\varepsilon_{zz} > 0$, $\varepsilon_{xx} < 0$ объясняется просто тем, что фазовая скорость этой волны зависит от обеих компонент тензора ε_{ij} .

Из формы ПВВ для необыкновенной волны следует, что с приближе-

нием направления распространения к направлениям асимптот гипербол длина радиуса-вектора, соединяющего начало координат (рис.1) с ПВВ, стремится к бесконечности, т.е. $k_e \rightarrow \infty$. Следовательно, $v_p = \omega / k_e \rightarrow 0$, т.е. фазовая скорость v_p необыкновенной волны стремится к нулю. Это непосредственно следует также из выражений для k_e и v_p :

$$k_e^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(\frac{\sin^2 \theta}{\epsilon_{zz}} - \frac{\cos^2 \theta}{|\epsilon_{xx}|} \right)^{-1}, \quad v_p^2 = c^2 \cdot \left(\frac{\sin^2 \theta}{\epsilon_{zz}} - \frac{\cos^2 \theta}{|\epsilon_{xx}|} \right), \quad (2)$$

согласно которым с приближением θ к θ_0 имеем

$$k_e \rightarrow \infty \text{ (т.е. } \lambda_e \rightarrow 0 \text{)}, \quad v_p \rightarrow 0, \quad (3)$$

$$\theta_0 = \arctg \sqrt{\frac{\epsilon_{zz}}{\epsilon_{xx}}}, \quad (4)$$

где λ_e – длина необыкновенной волны.

Сотношения (2) соответствуют случаю $\epsilon_{zz} > 0$, $\epsilon_{xx} < 0$. Конус с раствором $2\theta_0$ с вершиной в начале координат и осью, совпадающей с осью z , является конусом “остановки света”.

Перейдем теперь к учету поглощения. Оно ограничивает модуль k_e сверху и, в соответствии с этим, длину волны и фазовую скорость – снизу. Это следует из того, что в присутствии мнимых частей у ϵ_{ij} выражения в скобках в (2) не обращаются в нуль ни при каком θ . Не приводя соответствующих выражений для расчета $k_{ex,y}$, $v_{p,x,y}$, на рис.2,3 мы приводим кривые, показывающие зависимость этих величин от угла θ между направлением распространения волны и оптической осью кристалла в случаях слабого (рис.2) и сильного (рис.3) поглощения.

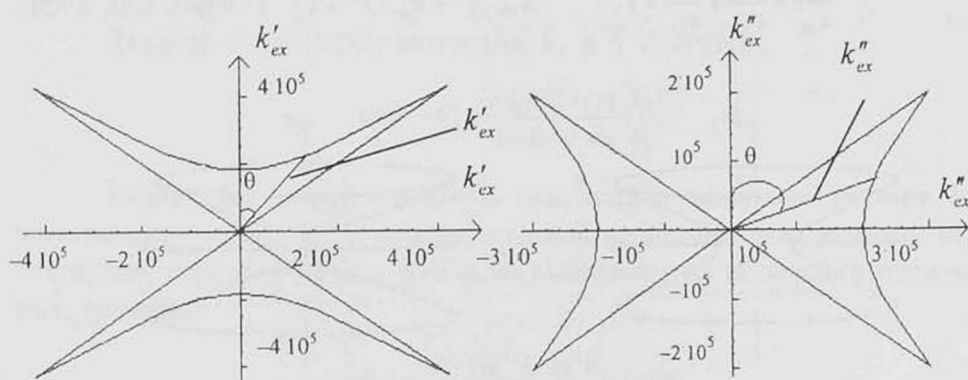


Рис.2. Зависимость k'_e , k''_e от θ при $\epsilon''_{xx} / \epsilon'_{xx} = 4 \cdot 10^{-7}$, $\epsilon''_{zz} / \epsilon'_{zz} = 4.5 \cdot 10^{-5}$, $\epsilon'_{xx} = 3.21669$, $\epsilon'_{zz} = -3.95041$.

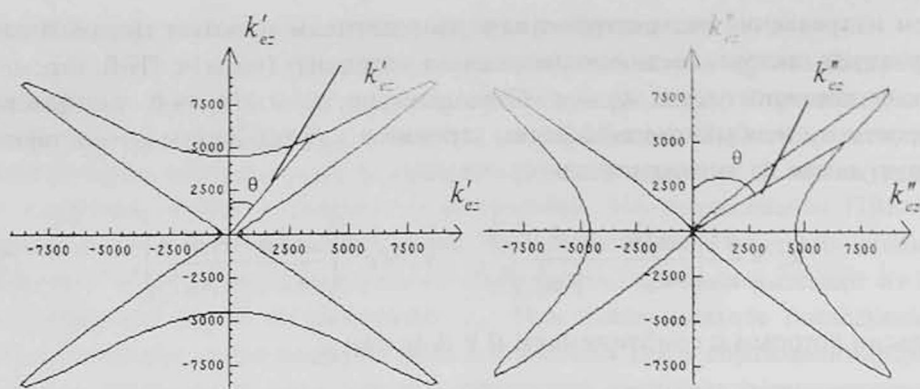


Рис.3. Зависимость k'_e, k''_e от θ при $\varepsilon_{xx}''/\varepsilon_{xx}' = 4.3 \cdot 10^{-2}$, $\varepsilon_{xx}''/\varepsilon_{xx}' = 0.13$ на частоте $\omega = 5.08 \cdot 10^{13}$ (кристалл MgF_2 , значения $\varepsilon_{ij}', \varepsilon_{ij}''$ рассчитаны в [6]).

Как видно из рис.2 и 3, в присутствии поглощения ПВВ замыкаются, но характерная вогнутость этой поверхности остается. Именно такой вогнутостью обусловлено необычное взаимное расположение $\mathbf{k}_e$ и вектора Пойнтинга $\mathbf{S}_e$, выявленное в [1] в случае отсутствия поглощения.

3. Характеристическая поверхность обратного тензора диэлектрической проницаемости и поверхность, заменяющая эллипсоид Френеля

В кристалле с замкнутой поверхностью волновых векторов характеристическая поверхность (ХП) тензора ε_{ij}^{-1} , с помощью которой определяют поляризации и показатели преломления [7], также представляет замкнутую поверхность – эллипсоид. Замкнута также ХП тензора ε_{ij} – эллипсоид Френеля. В кристаллах с открытой поверхностью волновых векторов открыты обе ХП. Они описываются уравнениями

$$\frac{x^2}{\varepsilon_{xx}} + \frac{y^2}{\varepsilon_{yy}} + \frac{z^2}{\varepsilon_{zz}} = 1, \quad \varepsilon_{xx} \cdot x^2 + \varepsilon_{yy} \cdot y^2 + \varepsilon_{zz} \cdot z^2 = 1. \quad (5)$$

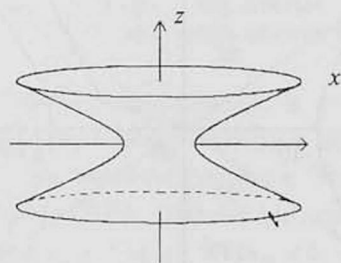


Рис.4. Форма характеристических поверхностей тензоров ε_{ij}^{-1} и ε_{ij} при $\varepsilon_{xx} > 0, \varepsilon_{zz} < 0$; превращение эллипсоида Френеля в однополостный гиперболоид.

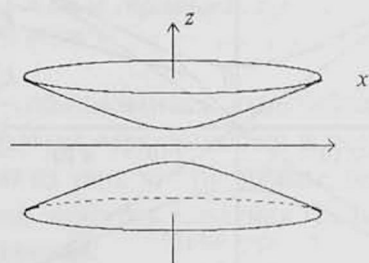


Рис.5. Форма характеристических поверхностей тензоров ε_{ij}^{-1} и ε_{ij} при $\varepsilon_{xx} < 0, \varepsilon_{zz} > 0$; превращение эллипсоида Френеля в двухполостный гиперболоид.

Рис.4 качественно передает форму ХП тензора ε_{ij}^{-1} и поверхности, заменяющей эллипсоид Френеля (ХП тензора ε_{ij}), при $\varepsilon_{xx} > 0$, $\varepsilon_{zz} < 0$, рис.5 – то же при $\varepsilon_{xx} < 0$, $\varepsilon_{zz} > 0$. Как ХП тензора ε_{ij}^{-1} , так и эллипсоид Френеля превращены в гиперболоиды – однополостные или двухполостные, в зависимости от знаков ε_{ij} .

4. Взаимное расположение вектора фазовой скорости, вектора Пойнтинга и электрического поля в необыкновенной волне. Изменение структуры необыкновенной волны

Как известно, групповая скорость, определяемая как $\partial\omega/\partial\mathbf{k}$, нормальна к поверхности волновых векторов. Скорость переноса энергии, определяемая как отношение $\bar{\mathbf{S}}/\bar{U}$ усредненного по периоду волны вектора Пойнтинга $\mathbf{S}$ к усредненной плотности электромагнитной энергии $\bar{U}$, в средах с симметричными тензорами $\hat{\varepsilon}$ и $\hat{\mu}$ ($\hat{\mu}$ – тензор магнитной проницаемости) совпадает с групповой скоростью [8]. Так как групповая скорость нормальна к ПВВ, то направление $\bar{\mathbf{S}}$ также нормально к ПВВ.

Если ПВВ открытая, то по мере приближения направления $\mathbf{k}_e$ к направлениям асимптот угол между $\mathbf{k}$ и нормалью к ПВВ стремится к $\pi/2$. Действительно, с приближением θ к θ_0 направление $\mathbf{k}$ приближается к направлению асимптоты, и так как последняя приближается к направлению касательной, то нормаль к ПВВ (т.е. нормаль к касательной) становится перпендикулярной к $\mathbf{k}_e$. Описанная геометрическая картина соответствует случаю отсутствия поглощения, при котором получаем

$$\operatorname{tg} \theta_s = -\operatorname{tg} \theta \cdot \operatorname{ctg}^2 \theta_0, \quad (6)$$

где θ_s – угол между вектором Пойнтинга и осью z (согласно уже принятым обозначениям, θ есть угол между $\mathbf{k}_e$ и осью z).

При $\theta \approx \theta_0$ получаем $\operatorname{tg} \theta_s \approx -\operatorname{ctg} \theta_0$, т.е. векторы $\bar{\mathbf{S}}$ и $\mathbf{k}_e$ перпендикулярны друг другу.

Для угла $\theta_s - \theta$ между векторами $\mathbf{k}_e$ и $\bar{\mathbf{S}}$ получаем:

$$\operatorname{tg}(\theta_s - \theta) = \frac{-\operatorname{tg} \theta (1 + \operatorname{ctg}^2 \theta_0)}{1 - \operatorname{tg}^2 \theta \cdot \operatorname{ctg}^2 \theta_0}. \quad (7)$$

Рассмотрим теперь взаимную ориентацию волнового вектора $\mathbf{k}_e$ и электрического поля $\mathbf{E}_e$ в необыкновенной волне. Для угла ϕ между этими векторами, определяемого с помощью выражения их векторного произведения, получаем:

$$\sin \phi = \frac{1 - \operatorname{ctg}^2 \theta_0 \cdot \operatorname{tg}^2 \theta}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \theta_0 \cdot \operatorname{tg}^2 \theta}} \cdot \cos \theta. \quad (8)$$

Интервалы допустимых значений θ , соответствующих действительным значениям $\mathbf{k}_e$, определяются соотношениями $-\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0$ и

$\pi - \theta_0 \leq \theta \leq \pi + \theta_0$ в случае $\varepsilon_{xx} > 0$, $\varepsilon_{zz} < 0$ и соотношениями $\theta_0 \leq \theta \leq (\pi - \theta_0)$ и $\pi + \theta_0 \leq \theta \leq 2\pi - \theta_0$ при $\varepsilon_{xx} > 0$, $\varepsilon_{zz} < 0$.

Пусть, например, $\varepsilon_{xx} > 0$, $\varepsilon_{zz} < 0$. Тогда, подставив $\theta = 0$ (волна распространяется вдоль оси z), получаем $\sin \phi = 1$, т.е. $\phi = \pi/2$, волна поперечная. При $\theta = \theta_0$ получаем $\sin \phi = 0$, т.е. волна продольная. При $\theta = \theta_0$ величина $k_e = \infty$, поэтому имеет смысл говорить не о совпадении θ с θ_0 , а об устремлении $\theta \rightarrow \theta_0$. Согласно (8), с приближением θ к θ_0 направление электрического поля приближается к направлению $\mathbf{k}_e$, т.е. волна все меньше и меньше отличается от продольной. Магнитное поле стремится при этом к нулю, что следует из уравнения Максвелла $[\mathbf{k}_e \mathbf{H}] = \frac{\omega}{c} \mathbf{D}_e$: так как $\mathbf{D}_e$ ограничено сверху и $\mathbf{k}_e \perp \mathbf{H}$ (магнитная проницаемость — скаляр), то $|\mathbf{H}| = \left| \frac{\omega}{c} \mathbf{D}_e \right| / |\mathbf{k}_e| \rightarrow 0$ при $|\mathbf{k}_e| \rightarrow \infty$.

5. Зависимость групповой скорости необыкновенной волны от угла, задающего направление распространения

Рассмотрим зависимость v_g от θ при учете дисперсии и поглощения. Кроме конкретного кристалла MgF_2 с установленными в [6] ε_{ij} , обладающими большими мнимыми частями, мы рассмотрим также ситуацию, когда ε_{ij} обладают малыми мнимыми частями, не имея при этом в виду какой-либо конкретный кристалл, а имея целью выяснить в общих чертах влияние поглощения на v_g .

Компоненты v_{gx} , v_{gz} могут быть вычислены на основании соотношения [9]

$$\bar{\mathbf{S}} = \bar{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{v}_g. \quad (9)$$

На рис.6 представлена зависимость c/v'_g (v'_g — модуль действительной части v_g) от θ . Во всем интервале углов θ , охваченном на рис.6, v'_g больше v''_g (v''_g — модуль мнимой части v_g) не менее чем в 10 раз, чем обеспечивается смысл групповой скорости.

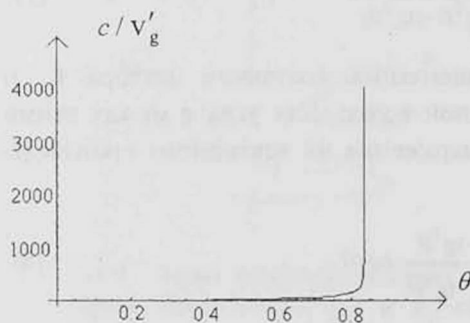


Рис.6. Зависимость c/v'_g от θ при $\varepsilon''_{xx}/\varepsilon'_{xx} = 4 \cdot 10^{-7}$, $\varepsilon''_{zz}/\varepsilon'_{zz} = 4.5 \cdot 10^{-5}$.

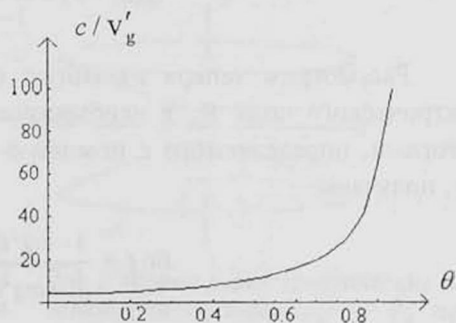


Рис.7. Зависимость c/v'_g от θ при $\varepsilon''_{xx}/\varepsilon'_{xx} = 4.3 \cdot 10^{-2}$, $\varepsilon''_{zz}/\varepsilon'_{zz} = 0.13$.

Рис.7 относится к кристаллу MgF_2 с параметрами, приведенными в [6]. Величина v'_g больше v_g^* не менее чем в 10 раз в интервале θ от 0 до 0,8 радиан.

В случае, изображенном на рис.6, имеется интервал направлений распространения, в котором v'_g в несколько тысяч раз меньше скорости света, несмотря на то, что $|\varepsilon_{ij}|$ не превышают 10; при этом в упомянутом интервале v_g^* остается в 10 и более раз меньше v'_g . Для сильно поглощающего кристалла отношение c/v'_g достигает значений около 10^2 при $v_g^*/v'_g < 0.1$.

В числе характерных особенностей рассматриваемых здесь сред отметим не только новую, необычную форму оптических индикатрис, описывающих зависимость k_e , v_p , v_g , длины волны λ_e и поляризации от направления распространения, но и связанные с этим необычно малые значения v_p , v_g , k_e и необычно большие значения k_e при обычных, порядка $1 \div 10$ значениях модулей компонент ε_{ij} диэлектрического тензора.

Отметим, что разные знаки у компонент ε'_{ij} осуществляются также в кристалле TiO_2 [6].

Кристаллы с открытой ПВВ могут быть основой для создания плоских линз [10].

ЛИТЕРАТУРА

1. О.С.Ерицян. Кристаллография, 33, 461 (1978).
2. О.С.Ерицян. Оптика гиротропных сред и холестерических жидких кристаллов. Ереван, Айастан, 1988.
3. S.E.Harris. Phys. Rev. Lett., 82, 461 (1999).
4. L.V.Nau, S.E.Harris, Z.Dutton, and C.H. Bekroozi. Nature (London), 397, 594 (1999).
5. М.И.Рязанов. ЖЭТФ, 103, 1840 (1993).
6. В.В.Брыксин, Д.Н.Мирлин, И.И.Решина. ФТТ, 15, 1118 (1973).
7. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Электродинамика сплошных сред. М., Наука, 1982.
8. А.Ярив, П.Юх. Оптические волны в кристаллах. М., Мир, 1987.
9. В.М.Агранович, В.Л.Гинзбург. Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов. М., Наука, 1982.
10. О.С.Ерицян. Изв. НАН Армении, Физика (в печати).

OPTICS OF UNIAXIAL CRYSTALS WITH OPEN SURFACES OF WAVE VECTORS. "LIGHT STOPPING" CONE

H.S. ERITSYAN, H.M. ARAKELYAN

Optical properties of media with open surfaces of wave vectors (OSWV) are considered. The traditional optical surfaces (the surface of wave vectors, the characteristic surface of reverse dielectric tensor, the Fresnel's ellipsoide) are investigated and it is shown that these surfaces turn into open ones. Some optical features stipulated by the open character of OSWV are revealed.