

УДК 537.87

ИЗЛУЧЕНИЕ СИСТЕМЫ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ, ДВИЖУЩИХСЯ С ПРОИЗВОЛЬНЫМИ СКОРОСТЯМИ

Б.В. ХАЧАТРЯН

Ереванский государственный университет

(Поступила в редакцию 15 февраля 2002 г.)

Получена общая формула для расчета углового распределения интенсивности излучения системы зарядов, совершающих движение по произвольным заданным законам $\mathbf{r}_m(t)$.

Рассмотрим систему зарядов, состоящую из N частиц с зарядами $e_m (m = 1, 2, \dots, N)$, движущимися произвольным образом; радиус-векторы $\mathbf{r}_m(t)$ и скорости движения $\mathbf{v}_m(t) = \dot{\mathbf{r}}_m(t)$ зарядов суть заданные произвольные функции времени. Найдем угловое распределение интенсивности излучения такой системы, выраженное непосредственно через скорости и ускорения $\dot{\mathbf{v}}_m(t)$ зарядов. Соответствующая формула для случая одного произвольно движущегося заряда имеется (см., например, [1,2]), а для многих частиц, насколько нам известно, такой формулы в литературе нет.

Будем исходить из общеизвестных формул теории излучения заряженных частиц [1]. Как известно, энергия излучения $dE_{\mathbf{n},\omega}$ в направлении $\mathbf{n}$, в элемент телесного угла $d\Omega$ в виде волн с частотами в интервале $\omega, \omega + d\omega$ ($\mathbf{n} = \mathbf{R}/R$, $\mathbf{R}$ – радиус-вектор точки наблюдения) определяется формулами

$$dE_{\mathbf{n},\omega} = \frac{c}{8\pi^2} |\mathbf{H}_\omega|^2 R^2 d\Omega d\omega \quad (1)$$

где

$$\mathbf{A}_\omega = \frac{e^{ikR}}{cR} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) e^{i\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{r} dt, \quad \mathbf{H}_\omega = i[\mathbf{k} \mathbf{A}_\omega] \quad (2)$$

есть Фурье-образы векторного потенциала и магнитного поля излученной сферической волны, $\mathbf{k} = k\mathbf{n} = \frac{\omega}{c}\mathbf{n}$. В формуле (1) частота ω принимает значение в интервале $(-\infty, \infty)$.

В нашем случае $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sum_m e_m \mathbf{v}_m(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_m(t))$ и для $\mathbf{A}_\omega$ находим

$$\mathbf{A}_\omega = \frac{e^{ikR}}{cR} \sum_m e_m \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{v}_m(t) e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_m(t))} dt. \quad (3)$$

Если функции $\mathbf{r}_m(t)$ известны, то формула (3) совместно с (1) и (2) дает решение задачи об излучении системы зарядов. Для того чтобы получить компактную формулу, преобразуем выражение (3), проинтегрировав его по частям (мы убедимся, что это даст возможность произвести в дальнейшем интегрирование по частоте; на данном этапе, как легко убедиться, это невозможно):

$$\mathbf{A}_\omega = -i \frac{e^{ikR}}{\omega R} \left(\sum_m e_m \frac{e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_m(t))}}{1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}_m(t)} \boldsymbol{\beta}_m(t) - \sum_m e_m \int \frac{d}{dt} (\boldsymbol{\beta}_m (1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}_m)^{-1}) e^{i\omega(t - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_m}{c})} dt \right). \quad (4)$$

Вертикальная черта в первом слагаемом справа означает, что берется разность значений суммы на пределах интегрирования, $\boldsymbol{\beta}_m \equiv \boldsymbol{\beta}_m(t) = \mathbf{v}_m(t)/c$. Введем обозначения

$$\mathbf{P}_m(t) = \boldsymbol{\beta}_m (1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}_m)^{-1}, \quad \alpha_m = \frac{-ie_m}{\omega} e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_m(t))} \quad (5)$$

и произведем калибровочное преобразование потенциала (4), введя вместо $\mathbf{A}_\omega$ новый векторный потенциал

$$\mathbf{A}_\omega = \sum_m \text{grad} f_m, \quad f_m = \alpha_m e^{ikR} (\ln k(R - \boldsymbol{\beta}_m \cdot \mathbf{R})) \cdot e^{ikR}.$$

Для нового вектора-потенциала в результате получается (обозначение потенциала не меняем)

$$\mathbf{A}_\omega = i \frac{e^{ikR}}{\omega R} \sum_m e \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\mathbf{P}}_m(t) e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_m(t))} dt, \quad (6)$$

где $\dot{\mathbf{P}}_m = d\mathbf{P}_m/dt$. При получении выражения (6) мы отбросили векторы, параллельные вектору $\mathbf{n}$, поскольку при этом, согласно (2), поле излучения $\mathbf{H}_\omega$ не меняется.

В (6) отсутствует первое слагаемое правой части формулы (4), которое дает излучение в начале и конце интервала времени, в течение которого совершаются интересующие нас движения с законами $\mathbf{r}_m(t)$. (Формулу (6), как отметил в частной беседе А.О.Меликян, можно получить и непосредственно из (3) в результате удачной замены переменных и некоторых преобразований.)

Если теперь вместо (4) в качестве векторного потенциала воспользоваться формулой (6), то появляется возможность проинтегрировать в общем виде спектральную плотность излучения (1) по частоте ω , в результате чего получаем

$$dE_n = \int dE_{n\omega} = \frac{d\Omega}{4\pi c} \sum_{m,m'} e_m e_{m'} \int [\mathbf{n} \dot{\mathbf{P}}_m(t)] [\mathbf{n} \dot{\mathbf{P}}_{m'}(t')] \delta(\Psi_m(t) - \Psi_{m'}(t')) dt dt', \quad (7)$$

где $\Psi_m(t) = t - \mathbf{n} \mathbf{r}_m(t) / c$.

Появление δ -функции позволяет произвести еще одно интегрирование (по переменной t'). Для выполнения этого интегрирования разобьем двойную сумму на две части: $\Sigma = \Sigma + \Sigma$. В первой сумме уравнение $\Psi_m(t) = \Psi_{m'}(t')$ (равенство нулю аргумента δ -функции) имеет единственный корень $t = t'$, и результат интегрирования по t' сводится к делению подынтегрального выражения на $\partial \Psi_m(t) / \partial t' |_{t=t'} = 1 - \mathbf{n} \beta_m(t)$ (отсутствие другого корня $t' \neq t$ уравнения $\Psi_m(t) = \Psi_{m'}(t')$ легко доказывается, если принять во внимание условие $\beta < 1$). В двойной сумме $m \neq m'$ результат интегрирования сводится к делению подынтегрального выражения на $1 - \mathbf{n} \beta_{m'}(t')$, где $t' = t'(t, m, m')$ – корень уравнения $\Psi_m(t) = \Psi_{m'}(t')$, зависящий, очевидно, от t, m, m' и, конечно, от $\mathbf{n}$ и закона движения. В результате интегрирования из (7) получаем следующую формулу для углового распределения полной энергии излучения dE_n (с целью упрощения формул введены обозначения $\chi_m = 1 - \mathbf{n} \beta_m(t)$, $\chi_{m'} = 1 - \mathbf{n} \beta_{m'}(t')$):

$$dE_n = \sum_m dE_n^{(m)} + \sum_{m \neq m'} dE_n^{(m, m')}, \quad (8)$$

где

$$dE_n^{(m)} = d\Omega \frac{e_m^2}{4\pi c} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\dot{\beta}_m^2}{\chi_m^3} - 2\beta_m \dot{\beta}_m \frac{\dot{\chi}_m}{\chi_m^4} - (1 - \beta_m^2) \frac{\dot{\chi}_m^2}{\chi_m^5} \right\} dt, \quad (8')$$

(это известный результат для одной частицы с зарядом e_m , движущейся со скоростью $\mathbf{v}_m(t) = c \beta_m(t)$) и

$$dE_n^{(m, m')} = d\Omega \frac{e_m e_{m'}}{4\pi c} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\dot{\beta}_m \dot{\beta}_{m'}}{\chi_m \chi_{m'}^2} - \frac{\dot{\beta}_m \beta_{m'} \dot{\chi}_{m'}}{\chi_m \chi_{m'}^3} - \frac{\beta_m \dot{\beta}_{m'} \dot{\chi}_m}{\chi_m^2 \chi_{m'}^2} - (1 - \beta_m \beta_{m'}) \frac{\dot{\chi}_m \dot{\chi}_{m'}}{\chi_m^2 \chi_{m'}^3} \right\} dt. \quad (8'')$$

Аргументом всех величин с индексом $m'(m)$ является $t'(t)$. Точка над буквой означает дифференцирование по аргументу.

Рассмотрим конкретный пример применения формул (8). Пример подберем таким образом, чтобы вычисления были простые, их можно было довести до конца и чтобы окончательный результат показал бы, как “работают” полученные формулы.

Пусть имеем N осцилляторов, расположенных на оси x в точках mx_0 ($m = 1, 2, \dots, N$), колеблющихся в плоскости (x, y) параллельно оси y , с одинаковыми частотами ω и амплитудами y_0 , и движущимися вдоль оси x со скоростью v_0 , т.е. радиус-вектор m -того осциллятора $\mathbf{r}_m(t)$ имеет координаты $\mathbf{r}_m(t) = (mx_0 + v_0 t, y_0 \sin(\omega t + \varphi_m), 0)$. Посчитаем излучение от этих осцилляторов в точке наблюдения в плоскости (x, z) , так что вектор $\mathbf{n} = (\cos \theta, 0, \sin \theta)$, где θ – угол между векторами $\mathbf{n}$ и $\mathbf{v}_0$ (в данном случае естественно вычислить

излучение в течение одного периода). Из формул (8') и (8'') легко получить для углового распределения излучения следующие выражения:

$$\frac{dE_n^{(m)}}{d\Omega} = \frac{e_m^2 \gamma_0^2 \omega^3}{4c^3 (1 - \beta_0 \cos \theta)^3}, \quad \frac{dE_n^{(m, m')}}{d\Omega} = \frac{e_m e_{m'} \gamma_0^2 \omega^3}{4c^3 (1 - \beta_0 \cos \theta)^3} \cos(\omega\tau + \varphi_m - \varphi_{m'}), \quad (9)$$

где

$$t - t' = \tau = \frac{(m - m')x_0 \cos \theta}{c(1 - \beta_0 \cos \theta)}. \quad (10)$$

Если все осцилляторы имеют одинаковый заряд, то интерференционная часть излучения $dE_n^{(m, m')}$ для любой пары (m, m') отличается от излучения одного осциллятора лишь множителем $\cos(\omega\tau + \varphi_m - \varphi_{m'})$. А если, вдобавок, одинаковы и все фазы ($\varphi_m = \varphi_{m'}$) то при выполнении "резонансного" условия $\omega\tau = 2\pi p$ (p — целое число) из формул (8) и (9) следует, что излучение N осцилляторов в N^2 раза превышает излучение одного осциллятора. Резонансное условие выполняется, когда разность хода волн, излученных любой парой осцилляторов, кратна доплеровски-смещенной длине волны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Теория поля, М., 1973.
2. Дж.Джексон. Классическая электродинамика, М., 1965.

ԿԱՄԱՅԱԿԱՆ ԱՐԱԳՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐՈՎ ՇԱՐԺՎՈՂ ԼԻՑԶԱՎՈՐՎԱԾ
ՄԱՍՆԻԿՆԵՐԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳԻ ՃԱՌԱԳԱՅԹՈՒՄԸ

Բ.Վ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ

Ստացված է ընդհանուր բանաձև կամայական արագություններով շարժվող լիցքավորված մասնիկների համակարգի ճառագայթման ինտենսիվության բաշխման համար:

RADIATION FROM A SYSTEM OF CHARGED PARTICLES MOVING WITH ARBITRARY VELOCITIES

B.V. KHACHATRYAN

A general formula is derived for the angular distribution of the radiation intensity from a system of charged particles moving by arbitrary given laws $r_m(t)$.