

УДК 621.372.8

## ВОЗБУЖДЕНИЕ ТОРОИДАЛЬНОГО РЕЗОНАТОРА ТОКОМ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЧАСТИЦЫ

В.Г. КОЧАРЯН

Ереванский физический институт

(Поступила в редакцию 30 мая 2003 г.)

Исследованы свойства переходного и синхротронного излучений, возбуждаемых в тороиде с круглым поперечным сечением при вращении в нем заряженной частицы. Развита метод определения вынужденных электромагнитных колебаний для случая, когда сгусток заряженных частиц движется вдоль окружности с радиусом, совпадающим со средним радиусом тороида. Метод основан на разложении возбуждающих колебаний тока по определяемым собственным функциям.

### 1. Введение

В последние годы возрос интерес к явлению синхротронного (магнитно-тормозного) излучения [1,2]. Это объясняется огромной прикладной значимостью этого явления как в технологических, так и в научных приложениях, где оно используется как удобный инструмент для проведения исследований. В настоящее время в Ереване проводятся работы по созданию источника синхротронного излучения [3,4].

Излучение заряженной частицы, движущейся вдоль оси тороидального резонатора, является синхротронным излучением, в то же время оно обладает рядом особенностей, связанных с тем обстоятельством, что излучение происходит в тороидальном резонаторе (дискретный спектр частот, своеобразное распределение интенсивности на различных модах и т.д.). Исследованию этих особенностей посвящена настоящая работа.

Определение собственных частот и собственных функций тороидального резонатора является проблематичным, так как переменные не разделяются даже в скалярной задаче. Между тем, ранее в работе [5] были разработаны асимптотические методы разделения переменных и получены асимптотические выражения для электромагнитных полей и частот в приближении большого тора.

Ниже представлена и решается задача по возбуждению тороидального резонатора с круглым поперечным сечением вращающейся по орбите радиуса  $R$  заряженной частицей, образующей ток  $\mathbf{j} = (0, 0, j_\varphi)$  в локальной "квазитороидальной" системе координат [5,6]. В данной задаче используются собст-

венные функции и собственные значения в виде разложений, полученных методом последовательных приближений (МПП) в работе [7] с точностью до  $O(\rho_0^3)$ , где  $\rho_0 = a/R$  – отношение поперечного радиуса  $a$  к главному (среднему) радиусу  $R$ . Сам метод МПП был развит в работе [8]. В собственных значениях  $\omega_{pm} = c\sqrt{\chi_{0p}^2 + (m^2 + 0.75)\rho_0^2} / a\sqrt{\epsilon}$  для данной точности присутствует первая поправка на кривизну тороида. Здесь  $\chi_{0p}$  –  $p$ -ый корень функции Бесселя нулевого порядка,  $\epsilon$  – диэлектрическая проницаемость среды, заполняющей тороид,  $m = 0, 1, 2, \dots$  – целые числа, определяющие зависимость поля от азимутальной координаты  $\varphi$  в поперечном сечении тороида. При сравнении с результатами симуляции численными методами конечных элементов (FEM) точность данного приближения не хуже 2% вплоть до  $\rho_0 = 0.5$ . Полнота же полученной системы собственных функций обосновывается: 1) предельным переходом при  $\rho_0 \rightarrow 0$ , приводящим к прямолинейному круглому волноводу с известными собственными функциями; 2) сочетанием и сравнением результатов, полученных методами МПП и FEM; 3) сравнением полученных собственных значений тороидальных колебаний с таковыми в прямоугольном тороидальном резонаторе; 4) удовлетворительным согласованием результатов измерений тороидальных колебаний в резонаторе с прямоугольным поперечным сечением [9].

## 2. Расчет возбуждения тороидального резонатора

Пусть тороидальный резонатор с круглым поперечным сечением находится в однородном магнитном поле, которое удерживает заряженную частицу на заданной орбите. Частота вращения частицы в магнитном поле определяется [10] как

$$\Omega = \frac{v}{R} = \frac{eH_0}{mc\gamma}, \quad (1)$$

где  $v$  – скорость частицы,  $e, m$  – заряд и масса частицы,  $H_0$  – напряженность внешнего магнитного поля,  $\gamma$  – Лоренц-фактор. Если в тороид инжектируется заряженная частица, которая в начальный момент времени  $t = 0$  имеет в “квазиторoidalной” системе координат координаты  $\xi = 0$ ,  $\theta = 0$  и  $\varphi = 0$ , то для плотности тока, образованного точечным зарядом, вращающимся с частотой  $\Omega$  в тороиде, имеем

$$j_\varphi = \rho v = \frac{e\Omega\delta(\xi)\delta(\varphi - \Omega t)}{a^2\xi}, \quad (2)$$

где  $\delta(x)$  – дельта-функция Дирака.

Предполагая, что время существования тока в резонаторе конечно, обозначим через  $\alpha$  число оборотов точечного заряда в тороиде, умноженное на  $2\pi$ . Тогда для времени существования тока в резонаторе  $t_{ex} = \alpha/\Omega$ . Целочисленное значение  $\alpha$  соответствует инжекции и вылету заряженной частицы с координатой  $\varphi = 0$ , дробное значение – вылету в интервале  $0 < \varphi < 2\pi$ . По-

скольку в дальнейшем предполагается использование разложений только по осесимметричным собственным функциям, то под инжекцией и вылетом следует понимать появление и исчезновение заряженной частицы в моменты времени  $t=0$  и  $t_{ex} = \alpha/\Omega$  с соответствующей координатой  $\varphi$  и  $\xi=0$ ,  $\theta=0$ . Эти акты, согласно В.Л. Гинзбургу [11], должны сопровождаться переходным излучением

В качестве собственных функций при возбуждении током, проходящим через центр поперечного сечения ( $\xi=0$ ), берутся осесимметричные неоднородные моды [7]. После нормирования они равны

$$\psi_{pm}(\xi, \varphi) = \frac{\sqrt{\varepsilon_m} J_0(\chi_{0p} \xi)}{\pi a \sqrt{h_\varphi} J_1(\chi_{0p})} \cos(m\varphi) + O(\rho_0^3), \quad (3)$$

где  $h_\varphi = R(1 - \rho_0 \xi \cos \vartheta) \equiv Rh$ ,  $\varepsilon_m = \begin{cases} 0,5, & m=0, \\ 1, & m \neq 0. \end{cases}$

Из уравнений Максвелла для  $\varphi$ -той компоненты Фурье-образа электрического поля имеем следующее волновое уравнение:

$$\Delta E_{\varphi\omega} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon E_{\varphi\omega} = \frac{2ei\omega\delta(\xi)\delta(\theta)}{a^2 \varepsilon \xi h_\varphi^2 v^2} (\beta^2 \varepsilon h^2 - 1) \exp\left(-i \frac{\omega}{\Omega} \varphi\right), \quad (4)$$

решение которого ищем в виде разложений по собственным функциям  $E_{\varphi\omega} = \sum \sum E_{pm}^0 \psi_{pm}(\xi, \varphi)$ . Разложим правую часть уравнения (4) по этим собственным функциям:

$$\frac{2ei\omega\delta(\xi)\delta(\theta)}{a^2 \varepsilon \xi h_\varphi^2 v^2} (\beta^2 \varepsilon h^2 - 1) \exp\left(-i \frac{\omega}{\Omega} \varphi\right) = \sum_p \sum_m j_{pm}^0 \psi_{pm}(\xi, \varphi). \quad (5)$$

Для коэффициентов разложения  $j_{pm}^0$  получаем:

$$j_{pm}^0 = \frac{2ei\omega\sqrt{\varepsilon_m} R}{\pi \varepsilon a J_1(\chi_{0p}) v^2} (\beta^2 \varepsilon - 1) \int_0^\alpha \cos(m\varphi) \exp\left(-i \frac{\omega}{\Omega} \varphi\right) d\varphi, \quad (6)$$

где  $\alpha$ , как это было введено выше, число оборотов частицы, умноженное на  $2\pi$ . Подставляя разложение (5) с учетом (6) в уравнение (4), для коэффициентов разложения  $E_{pm}^0$  имеем:

$$E_{pm}^0 = \frac{2ie\sqrt{\varepsilon_m} c^2 (\beta^2 \varepsilon - 1) \omega}{\pi \varepsilon^2 a R \sqrt{R} J_1^2(\chi_{0p}) (m^2 \Omega^2 - \omega^2) (\omega^2 - \omega_{pm}^2)} \times \left[ i \frac{\omega}{\Omega} + \left( m \sin(m\alpha) - i \frac{\omega}{\Omega} \cos(m\alpha) \right) \exp\left(-i \frac{\omega}{\Omega} \right) \right]. \quad (7)$$

Интегрирование  $\int E_{pm}^0 \exp(i\omega t) d\omega$  будем производить в комплексной плоскости  $\omega = \omega' + i\omega''$ . Подынтегральная функция  $E_{pm}^0$  имеет особенности,

расположенные на действительной оси, в виде простых полюсов на частотах  $\omega = \pm\omega_{pm}$ , соответствующих собственным частотам резонатора, и  $\omega = \pm m\Omega$ , кратных частоте вращения. Вводя малое затухание  $i\omega''$  и замыкая контур интегрирования по верхней полуокружности с учетом леммы Жордана, обходим полюса под действительной осью. После интегрирования по  $\omega$  имеем следующие выражения для  $\varphi$ -компоненты возбужденного поля:

$$E_{\varphi}(\xi, \varphi, t) = -\frac{4ec(\beta^2 \varepsilon - 1)}{\pi a^2 R \beta \sqrt{h_{\varphi}} \varepsilon^2} \sum_p \sum_m \frac{\varepsilon_m J_0(\chi_{0p} \xi)}{J_1^2(\chi_{0p})} \cos(m\varphi) f_{pm}(t), \quad (8)$$

где для случая  $m\Omega \neq \omega_{pm}$  при  $t \leq \alpha/\Omega$   $f(t) = \frac{\omega_{pm} \sin(\omega_{pm} t) - m\Omega \sin(m\Omega t)}{m^2 \Omega^2 - \omega_{pm}^2}$ , а при  $t \geq \alpha/\Omega$   $f(t) = \frac{\omega_{pm} [\sin(\omega_{pm} t) + \cos(m\alpha) \sin(\omega_{pm}(t - \alpha/\Omega))] - m\Omega \sin(m\Omega) \cos(\omega_{pm}(t - \alpha/\Omega))}{m^2 \Omega^2 - \omega_{pm}^2}$ , или, в случае целочисленного числа оборотов частицы, при  $t \geq \alpha/\Omega$   $f(t) = \frac{2\omega_{pm} \cos(\omega_{pm} \alpha / 2\Omega) \sin(\omega_{pm}(t - \alpha/\Omega))}{m^2 \Omega^2 - \omega_{pm}^2}$ . Для членов суммы (8), для которых выполняется равенство  $m\Omega = \omega_{pm}$ , функция  $f(t)$  имеет следующий вид: при  $t \leq \alpha/\Omega$   $f(t) = \frac{\sin(\omega_{pm} t)}{2\omega_{pm}}$ , а при  $t \geq \alpha/\Omega$   $f(t) = 0$ .

### 3. Анализ полей, возбужденных в тороиде

При компьютерном анализе формулы (8) число суммируемых мод варьировалось для  $\rho_0 = 0.02$  и точности  $O(\rho_0^3)$  в пределах 2500 – 9000 первых мод, т.е.  $0 \leq m \leq [50-150]$ ;  $1 \leq p \leq [50-60]$ . Число временных точек за оборот бралось равным  $2^n$ , что является необходимым условием для спектрального анализа методом FFT (Fast Fourier Transform). На рис.1 проиллюстрирован случай суммирования 5000 первых мод для компоненты поля  $E_{\varphi}/q$  и спектральной плотности излучения первых четырех оборотов заряженной частицы с энергией  $\varepsilon = mc^2 \gamma = 114.26$  МэВ ( $\beta = 0.99999$ ).

Зависимость  $\varphi$ -компоненты возбужденного поля рассчитывалась для точки наблюдения с координатами  $r = 0$ ,  $\theta = 0$ ;  $\varphi = 0$ . Колебания, возникающие при возбуждении тороида вращающейся частицей, в общем случае носят сложный негармоничный характер с убывающей амплитудой, и, как можно видеть, спектр излучения дискретен.

В целом энергия возбужденного поля в результате несинхронных энергообменных процессов сводится к нулю, и основной вклад в поле дает переходное излучение в моменты появления и обрыва тока  $t = 0$  и  $t = \alpha/\Omega$ , как это показано на рис.2. Там же показаны поля в моменты времени, соответствующие 9-10 оборотам с частицей и 11-12 оборотам без нее.

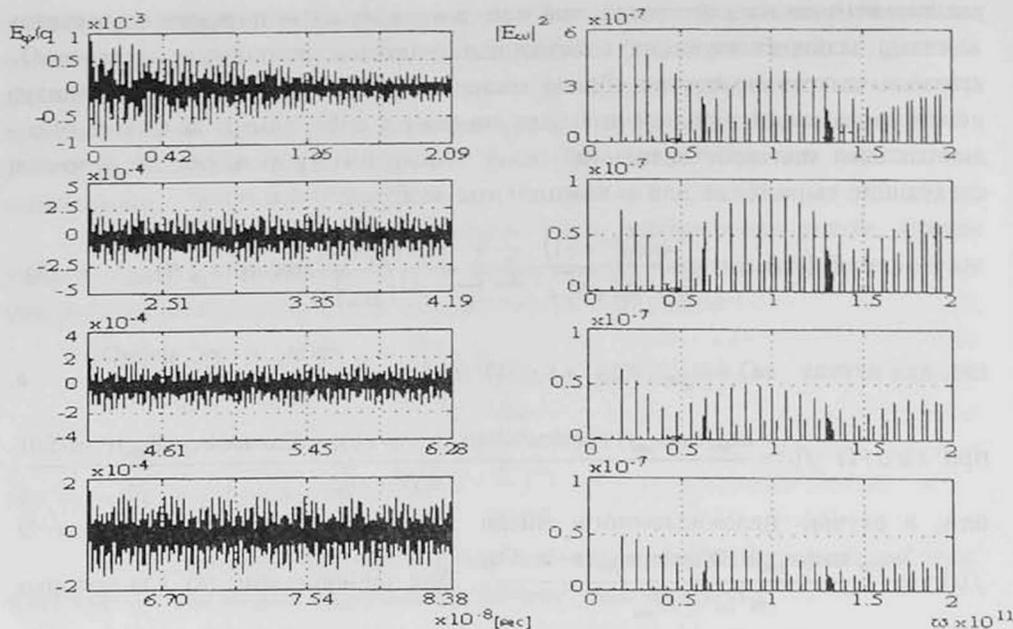


Рис.1. Поле  $E_\phi/q$  и спектральная плотность излучения для первых четырех оборотов заряженной частицы.

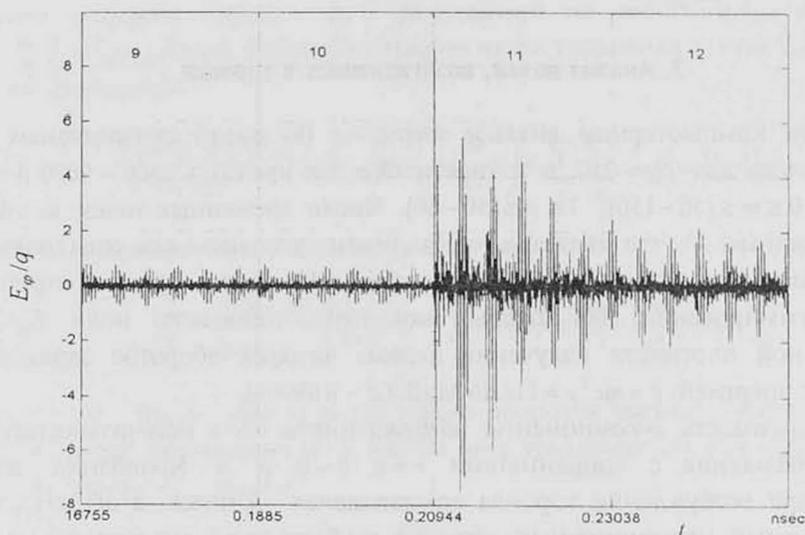
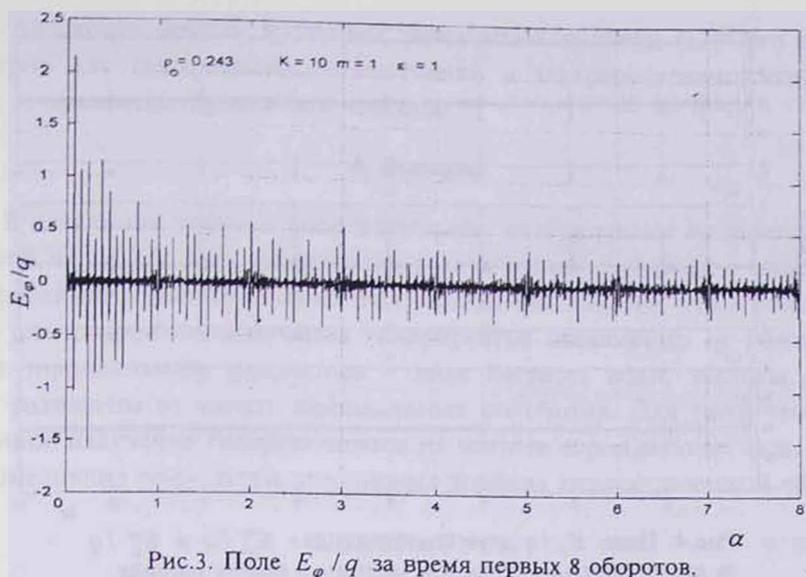


Рис.2. Поле  $E_\phi/q$  за время, соответствующее 9-10 оборотам с частицей и 11-12 оборотам без частицы.

Одним из условий синхронизма для полого тороида может быть выбор частоты обращения частицы, кратной одной из собственных частот резонатора. Этот режим возбуждения можно получить из условия  $K\Omega = \omega_{pm}$ , где  $K$  – целое число, выбором кривизны тороида из условия



$$\rho_0 = \frac{\chi_{op}}{\sqrt{K^2 \beta^2 - (m^2 + 0.75)}} \leq 1. \quad (9)$$

Этот случай проиллюстрирован на рис.3 для  $\rho_0 = 0.243$ ,  $K = 10$ ,  $m = 1$  в точке наблюдения с координатами  $\varphi = 0$ ,  $r = 0$ .

Из (8) видно, что поле излучения есть сумма переходного и синхротронного излучений. При  $t \leq \alpha/\Omega$  переходное излучение записывается в виде разложения

$$E_\varphi^{tr} = -\frac{4ec(\beta^2 \varepsilon - 1)}{\pi a^2 R \beta \sqrt{h\varepsilon^2}} \sum_p \sum_m \frac{\varepsilon_m J_0(\chi_{0p} \xi)}{J_1^2(\chi_{0p})} \frac{\omega_{pm} \sin(\omega_{pm} t)}{m^2 \Omega^2 - \omega_{pm}^2} \cos(m\varphi), \quad (10)$$

а синхротронное излучение – в виде

$$E_\varphi^{sc} = \frac{4ec(\beta^2 \varepsilon - 1)}{\pi a^2 R \beta \sqrt{h\varepsilon^2}} \sum_p \sum_m \frac{\varepsilon_m J_0(\chi_{0p} \xi)}{J_1^2(\chi_{0p})} \frac{m\Omega \sin(m\Omega t)}{m^2 \Omega^2 - \omega_{pm}^2} \cos(m\varphi). \quad (11)$$

На рис.4 приведены графики для времени, соответствующего первым 8 оборотам заряженной частицы в полном тороиде, по отдельности для  $E_\varphi$ ,  $E_\varphi^{tr}$  и  $E_\varphi^{sc}$  при  $K=11$  и  $m=5$  в точке наблюдения с координатами  $\varphi=0$ ,  $r=0$ .

На рис.5 показано распределение продольной составляющей электрического поля только синхротронного излучения по среднему радиусу в фиксированные моменты времени, соответствующие началу третьего оборота частицы, с шагом  $\Delta t = \pi/8\Omega$ .

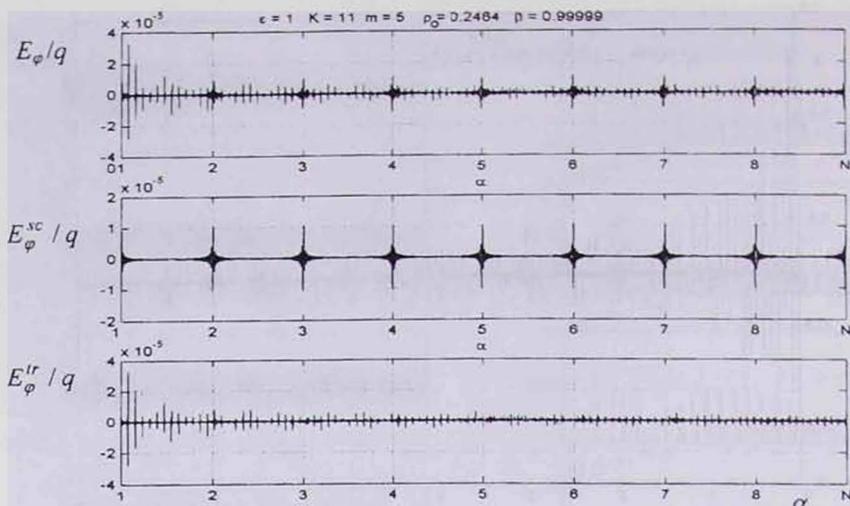


Рис.4. Поле  $E_\varphi/q$  и ее составляющие  $E_\varphi^{tr}/q$  и  $E_\varphi^{sc}/q$  за время первых 8 оборотов частицы в полном тороиде.

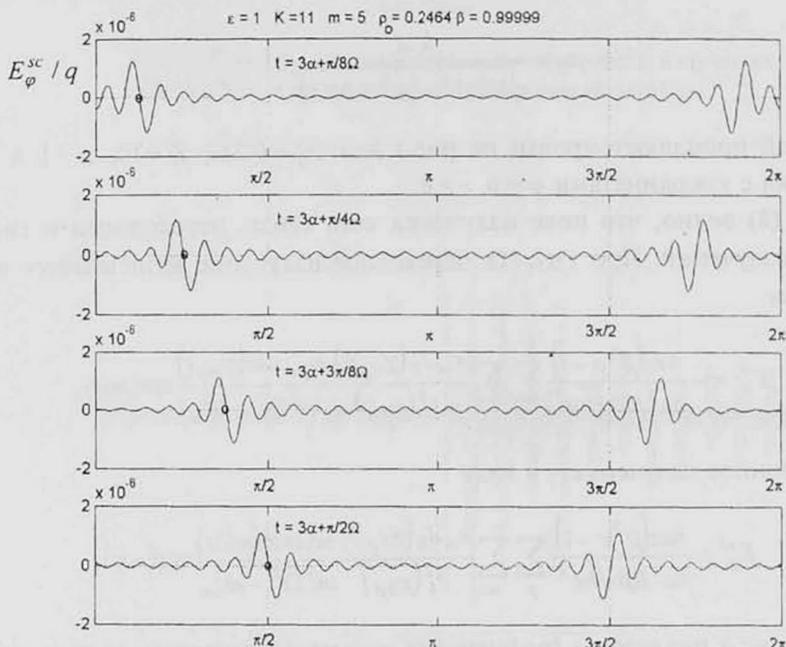


Рис.5. Распределение компоненты поля  $E_\varphi^{sc}/q$  по среднему радиусу в фиксированные моменты времени.

Анализ показывает, что продольная составляющая электрического поля синхротронного излучения состоит из поля излучения частицы и наведенного тока, движущихся в противоположных направлениях. В точках с координатами  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \pi$  поля гасятся и расходятся снова.

Действительно, из рисунков следует, что все излучение сосредоточено

вблизи плоскости орбиты вращения заряженной частицы [12]. Это свойство характерно для синхротронного излучения в ультрарелятивистском случае  $1 - \beta^2 \ll 1$  вращения заряженной частицы.

#### 4. Выводы

В идеальном тороиде поле излучения, возбужденное вращающейся заряженной частицей, есть суперпозиция двух типов излучений – переходного и синхротонного. Анализ полученных выражений показал, что в больших тороидах синхротонное излучение генерируется независимо от резонансных свойств тороидального резонатора в виде бегущих волн, частоты которых сильно разнесены от частот тороидальных колебаний. Для того, чтобы синхротонное излучение генерировалось на частоте тороидальных мод, необходимо замедление волн путем заполнения тороида диэлектрической средой.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. G.Margaritondo. Introduction to Synchrotron Radiation. New York, Oxford, Oxford University Press, 1988.
2. A.Hofman. Diagnostic with Synchrotron radiation. CAS (CERN Accelerator School), Grenoble, CERN 98-04, August, 1998.
3. V.Tsakanov et al. Center for the Advancement Natural Discoveries using Light Emission. A New Project for 3 GeV Intermediate Energy Light Source in the Republic of Armenia. Rev. Sci. Instr., 73, 1411 (2002).
4. Electron-Photon Interaction in Dense Media. Proc. of the NATO Advanced Research Workshop. Nor-Hamberd, Yerevan, Armenia, 25-29 June, 2001. Kluwer Academic Publishers, 2002.
5. Э.Д.Газазян, М.И.Иванян, А.Д.Тер-Погосян. О собственных электромагнитных колебаниях в тороидальном резонаторе. Препринт ЕФИ-887(38)-86, Ереван, 1986.
6. T.Liley, B.Shnizer, R.Kiel. Perturbation Theory Computation of Toroidal Uniform Modes within Empty Torus. AEU, 37, 359 (1983).
7. Э.Д.Газазян, В.Г.Кочарян, Г.Г.Оксузян. Тороидальные резонаторы с прямоугольным и круглым поперечными сечениями. Препринт ЕФИ-1145(22)-89, Ереван, 1989.
8. Л.Левин. Теория волноводов. М., Радио и связь, 1981.
9. E.D.Gazazyan, V.G.Kocharyan, G.G.Oxuzyan. Toroidal Cavity as an Accelerative Module. EPAC-94 International conference. London, England, vol.3, p.2125, 1994.
10. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Теория поля. М., Наука, 1973.
11. В.Л.Гинзбург. Теоретическая физика и астрофизика. М., Наука, 1981.
12. А.А.Соколов, И.М.Тернов. Релятивистский электрон. М., Наука, 1983.

#### EXCITATION OF A TOROIDAL RESONATOR BY THE CURRENT OF A ROTATING PARTICLE

V.G. KOCHARYAN

Features of the synchrotron and transition radiations excited in a toroid with a round cross-section at rotation of a charged particle in it are investigated. The method of definition of electromagnetic oscillations, when the charged particles bunch flies along the orbit radius conterminous to the toroid average radius is developed. The method is based on the expansion of stimulating oscillations of the current over determined eigenfunctions.