

УДК 537.87

ИЗЛУЧЕНИЕ ОСЦИЛЛЯТОРА ВНУТРИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ВОЛНОВОДА С ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИМ НАПОЛНЕНИЕМ

А.А. СААРЯН, А.С. КОТАНДЖЯН

Институт прикладных проблем физики НАН Армении

(Поступила в редакцию 23 декабря 2002 г.)

Рассмотрено излучение продольного заряженного осциллятора, равномерно движущегося по оси цилиндрического волновода, наполненного однородным диэлектриком. В соответствии с симметрией задачи излучаются только волны ТМ типа. Вычислен поток энергии излучения через поперечное сечение волновода. Приводятся результаты численных расчетов для соответствующей интенсивности в зависимости от радиуса волновода, диэлектрической проницаемости среды наполнения и параметров осциллятора. Проведено сравнение с интенсивностью излучения осциллятора в однородной среде. Показано, что существуют области значений частоты осцилляций, для которых интенсивность излучения в волноводе существенно превышает соответствующую величину в однородной среде.

1. Введение

Актуальность исследований излучателей различных типов обусловлена, прежде всего, перспективой использования релятивистских частиц в качестве источников электромагнитных волн в различных диапазонах частот. Излучение заряженных осцилляторов в вакууме и в неоднородных средах рассматривалось в целом ряде работ (см., например, [1-6] и приведенные там ссылки) в связи со многими возможными приложениями (генерация излучения, детектирование частиц высоких энергий и т.д.). В частности, излучение осциллятора в безграничной периодической среде исследовано в [1,2]. Частотно-угловое распределение интенсивности излучения осциллятора, движущегося над границей раздела двух сред, рассмотрено в [3,4]. В предыдущей нашей работе [7], на основе найденной в [8] функции Грина, исследовано излучение продольного осциллятора, равномерно движущегося по оси погруженного в однородную среду диэлектрического цилиндра. Выведена формула для спектрально-углового распределения интенсивности излучения, распространяющегося во внешнем, по отношению к цилиндру, пространстве.

В данной статье рассмотрено электромагнитное поле, генерируемое осциллятором внутри диэлектрического цилиндра. Найдены потери энергии на излучение осциллятором, движущимся по оси цилиндрического волновода с идеально проводящими стенками.

2. Поля осциллятора

Для нахождения поля заряда внутри цилиндрического волновода с проводящими стенками, заполненного веществом, диэлектрическая проницаемость которого равна ε_0 , рассмотрим сначала более общую задачу. Пусть точечный заряд q движется по оси диэлектрического цилиндра с проницаемостью ε_0 и радиусом ρ_1 , погруженного в однородную среду с диэлектрической проницаемостью ε_1 . Рассмотрим случай, когда движение заряда является наложением равномерного перемещения со скоростью v_0 и колебания с циклической частотой ω_0 и амплитудой z_0 :

$$z = v_0 t + z_0 \sin \omega_0 t, \quad x = y = 0, \quad (1)$$

где декартова ось z совпадает с осью цилиндра.

В соответствующим образом выбранной цилиндрической системе координат (ρ, φ, z) пространственная часть 4-мерного вектора плотности тока, создаваемого этим зарядом, запишется в виде

$$j_l = \frac{q}{\rho} v \delta(\rho) \delta(\varphi) \delta(z - v_0 t - z_0 \sin \omega_0 t) \delta_{lz}, \quad l = \rho, \varphi, z. \quad (2)$$

Соответствующее решение уравнений Максвелла для 4-вектора потенциала выражается через функцию Грина (ФГ) электромагнитного поля (тензор второго ранга):

$$A_l(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{2\pi^2 c} \int G_{il}(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t') j_l(\mathbf{r}', t') d\mathbf{r}' dt', \quad l = t, \rho, \varphi, z. \quad (3)$$

Вследствие цилиндрической симметрии рассматриваемой задачи удобно представить ФГ в виде следующего фурье-разложения:

$$G_{il}(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t') = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z d\omega G_{il}(m, k_z, \omega, \rho, \rho') \exp[i(m\varphi - \varphi') + ik_z(z - z') - i\omega(t - t')]. \quad (4)$$

Фигурирующий в (4) фурье-образ ФГ был найден в работе [8]. Из азимутальной симметрии задачи следует, что ненулевой вклад в векторный потенциал дает только слагаемое $m = 0$ в разложении (4). Соответствующие выражения для $G_{iz}(m = 0, k_z, \omega, \rho, \rho' = 0) \equiv G_{iz}(k_z, \omega, \rho)$ в лоренцевой калибровке приведены в работе [7]. Для рассматриваемой здесь области $\rho < \rho_1$ они принимают вид

$$\begin{aligned} G_{\rho z}(k_z, \omega, \rho) &= -i \frac{(1 - \varepsilon_0 / \varepsilon_1) k_z H_0(\lambda_1 \rho_1) H_1(\lambda_1 \rho_1)}{\rho_1 \lambda_0 W(J_0, H_0) W_\varepsilon(J_0, H_0)} J_1(\lambda_0 \rho), \\ G_{\varphi z}(k_z, \omega, \rho) &= 0, \\ G_{zz}(k_z, \omega, \rho) &= \frac{\pi}{2i} \left(H_0(\lambda_0 \rho) - \frac{W(H_0, H_0)}{W(J_0, H_0)} J_0(\lambda_0 \rho) \right), \end{aligned} \quad (5)$$

где $J_m(x)$, $H_m(x) \equiv H_m^{(1)}(x)$ — функции Бесселя и Ханкеля первого рода,

соответственно, а

$$\lambda_j^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_j - k_z^2, \quad j = 0, 1. \quad (6)$$

В формулах (5) введены следующие обозначения:

$$W(a, b) = a(\lambda_0 \rho_1) \frac{\partial b(\lambda_1 \rho_1)}{\partial \rho_1} - b(\lambda_1 \rho_1) \frac{\partial a(\lambda_0 \rho_1)}{\partial \rho_1}, \quad (7)$$

$$W_\varepsilon(J_0, H_0) = J_0(\lambda_0 \rho_1) H_+(\lambda_1 \rho_1) - \frac{\varepsilon_0 \lambda_1}{\varepsilon_1 \lambda_0} J_1(\lambda_0 \rho_1) H_0(\lambda_1 \rho_1).$$

Подставив (2) и (4) в формулу (3), для компонент векторного потенциала находим следующее представление:

$$A_i(\rho, z, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \exp[i(k_z z - \omega_n(k_z)t)] A_{ni}(k_z, \rho), \quad i = \rho, \varphi, z, \quad (8)$$

где

$$\omega = \omega_n(k_z) = n\omega_0 + k_z v_0, \quad (9)$$

а коэффициенты $A_{ni}(k_z, \rho)$ – фурье-образы компонент векторного потенциала электромагнитного поля. В области $\rho < \rho_1$ они определяются соотношениями

$$A_{n\rho} = \frac{qi(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)\omega_n(k_z)}{\pi c \varepsilon_1 \rho_1 \lambda_0} \frac{H_0(\lambda_1 \rho_1) H_1(\lambda_1 \rho_1)}{W_\varepsilon(J_0, H_0) W(J_0, H_0)} J_n(k_z z_0) J_1(\lambda_0 \rho), \quad (10)$$

$$A_{nz} = \frac{qi\omega_n(k_z)}{2ck_z} J_n(k_z z_0) \left[H_0(\lambda_0 \rho) - \frac{W(H_0, H_0)}{W(J_0, H_0)} J_0(\lambda_0 \rho) \right], \quad A_{n\varphi} = 0.$$

Соответствующий скалярный потенциал определяется из условия калибровки Лоренца. Разложения, аналогичные (8), можно написать и для напряженностей электромагнитного поля. Соответствующие фурье-коэффициенты имеют вид

$$E_{n\rho} = -\frac{iq\lambda_0}{2\varepsilon_0} J_n(k_z z_0) [B_{\text{osc}} J_1(\lambda_0 \rho) - H_1(\lambda_0 \rho)],$$

$$E_{nz} = \frac{q\lambda_0^2}{2k_z \varepsilon_0} J_n(k_z z_0) [B_{\text{osc}} J_0(\lambda_0 \rho) - H_0(\lambda_0 \rho)], \quad E_{n\varphi} = 0, \quad (11)$$

$$H_{n\varphi} = -\frac{qi\omega_n(k_z)\lambda_0}{2ck_z} J_n(k_z z_0) [B_{\text{osc}} J_1(\lambda_0 \rho) - H_1(\lambda_0 \rho)], \quad H_{n\rho} = H_{nz} = 0,$$

где введено обозначение

$$B_{\text{osc}} = \frac{W(H_0, H_0)}{W(J_0, H_0)} - \frac{2ik_z^2}{\pi\lambda_0^2} \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{\varepsilon_1 \rho_1} \frac{H_0(\lambda_1 \rho_1) H_1(\lambda_1 \rho_1)}{W(J_0, H_0) W_\varepsilon(J_0, H_0)}. \quad (12)$$

Векторный потенциал электромагнитного поля для цилиндрического волновода с идеально проводящими стенками получается из приведенных общих формул предельным переходом $\varepsilon_1 \rightarrow \infty$. Из формул (10) видно, что $\lambda_1(\varepsilon_1)$ входит только в аргумент функции Ханкеля. После ряда преобразований, с учетом асимптотических формул для этой функции при больших значениях аргумента [9], находим, что поле внутри цилиндрического волновода определяется формулой (8), в которой фурье-коэффициенты векторного и скалярного потенциалов имеют вид

$$A_{nz} = \frac{qi\omega_n(k_z)}{2ck_z} J_n(k_z z_0) \left[H_0(\lambda_0 \rho) - \frac{H_0(\lambda_0 \rho_1)}{J_0(\lambda_0 \rho_1)} J_0(\lambda_0 \rho) \right], \quad (13)$$

$$A_{n\rho} = A_{n\varphi} = 0, \quad \phi_n = \frac{ck_z A_{nz}}{\omega_n(k_z) \varepsilon_0}.$$

Отметим, что $A_i(\rho, z, t)$ является действительной функцией, и поэтому $A_n^*(k_z, \rho) = A_{-n}(-k_z, \rho)$. В результате формулу (8) можно записать в виде

$$A_i(\rho, z, t) = 2 \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \exp[i(k_z z - \omega_n(k_z) t)] A_n(k_z, \rho), \quad (14)$$

где штрих над знаком суммы указывает на то, что слагаемое $n=0$ следует брать с весом 1/2. Выражения, приведенные в (13), имеют особые точки, соответствующие нулям функции Бесселя:

$$J_0(\lambda_0 \rho_1) = 0. \quad (15)$$

Пусть $j_{0,s}, s=1,2,\dots$ – s -й положительный нуль функции Бесселя $J_0(x)$: $J_0(j_{0,s})=0$. Соответствующие моды $k_z = k_s$ определяются из уравнения $\lambda_0 \rho_1 = j_{0,s}$ с учетом выражений (6), (9):

$$(\beta_0^2 - 1)k_s^2 + 2n \frac{\omega_0 \sqrt{\varepsilon_0}}{c} \beta_0 k_s + \left(n^2 \frac{\omega_0^2 \varepsilon_0}{c^2} - \frac{j_{0,s}^2}{\rho_1^2} \right) = 0, \quad \beta_0 = \frac{v_0}{c} \sqrt{\varepsilon_0}. \quad (16)$$

Это уравнение имеет действительные решения только при условии

$$b_{n,s}^2 (1 - \beta_0^2) \leq 1, \quad b_{n,s} \equiv \frac{j_{0,s} c}{n \omega_0 \rho_1 \sqrt{\varepsilon_0}}, \quad (17)$$

и они имеют вид

$$k_s^{(\pm)} = \frac{n \omega_0 \sqrt{\varepsilon_0} / c}{1 - \beta_0^2} \left[\beta_0 \pm \sqrt{1 - b_{n,s}^2 (1 - \beta_0^2)} \right]. \quad (18)$$

Заметим, что если условие Черенкова для средней скорости частицы удовлетворяется, т.е. $\beta_0 > 1$, то неравенство (17) выполняется для всех значений $s=1,2,\dots$. В случае же $\beta_0 < 1$ условие (17) определяет максимальное значение s , которое мы обозначим через s_m :

$$j_{0,s_m} < \frac{n\omega_0 \sqrt{\varepsilon_0} \rho_1}{c\sqrt{1-\beta_0^2}} < j_{0,s_{m+1}}. \quad (19)$$

Значение функции $\omega_n(k_z)$ в точках $k_s^{(\pm)}$ равно

$$\omega_{ns}^{(\pm)} = \omega_n(k_s^{(\pm)}) = \frac{n\omega_0}{1-\beta_0^2} \left[1 \pm \beta_0 \sqrt{1-b_{n,s}^2(1-\beta_0^2)} \right]. \quad (20)$$

Таким образом, точки $k_z = k_s^{(\pm)}$ являются простыми полюсами фурье-образов (13). Они соответствуют собственным модам цилиндрического волновода ТМ типа. При действительном ε_0 эти полюсы расположены на действительной оси комплексной плоскости k_z , если выполняется условие (17). В формуле (14) для однозначности интеграла по k_z следует указать правила обхода действительных полюсов. Для этого заметим, что в физически реальных ситуациях диэлектрическая проницаемость является комплексной величиной: $\varepsilon_0 = \varepsilon'_0 + i\varepsilon''_0$, и мнимая часть ε''_0 определяет затухание в среде. При $|\varepsilon''_0| \ll \varepsilon'_0$ для мнимой части $k_s^{(\pm)}$ из (18) имеем

$$\text{Im } k_s^{(\pm)} = \pm C_1 \varepsilon''_0(\omega_n), \quad C_1 > 0, \quad (21)$$

где $\varepsilon''_0(\omega_n) \geq 0$ при $\omega_n \geq 0$. Рассмотрим конкретные случаи.

Пусть сначала условие Черенкова для средней скорости осциллятора не выполняется: $\beta_0 = v_0 \sqrt{\varepsilon'_0} / c < 1$. Из формул (18), (20), (21) следует, что

$$\text{Re } k_s^{(+)} > 0, \quad \omega_n(\text{Re } k_s^{(\pm)}) > 0, \quad \text{Im } k_s^{(+)} > 0, \quad \text{Im } k_s^{(-)} < 0,$$

$$\text{Re } k_s^{(-)} > 0 \quad \text{при} \quad 1 < b_{n,s} < \frac{1}{\sqrt{1-\beta_0^2}}, \quad (22)$$

$$\text{Re } k_s^{(-)} < 0 \quad \text{при} \quad b_{n,s} < 1.$$

Таким образом, в этом случае полюсы $k_s^{(+)}$ ($k_s^{(-)}$) расположены в верхней (нижней) полуплоскости комплексной плоскости k_z . В пределе $\varepsilon''_0 \rightarrow 0$, деформируя контур интегрирования, получаем правило обхода полюсов, приведенное на рис.1.

Теперь допустим, что $\beta_0 > 1$. Соответствующие неравенства имеют вид

$$\text{Re } k_s^{(+)} < 0, \quad \omega_n(\text{Re } k_s^{(\pm)}) < 0, \quad \text{Im } k_s^{(+)} < 0, \quad \omega_n(\text{Re } k_s^{(-)}) > 0, \quad \text{Im } k_s^{(-)} < 0,$$

$$\text{Re } k_s^{(-)} > 0 \quad \text{при} \quad b_{n,s} > 1, \quad (23)$$

$$\text{Re } k_s^{(-)} < 0 \quad \text{при} \quad b_{n,s} < 1.$$

Аналогично предыдущему случаю, непрерывно деформируя контур интегрирования по k_z , получаем правило обхода полюсов, приведенное на рис.2.

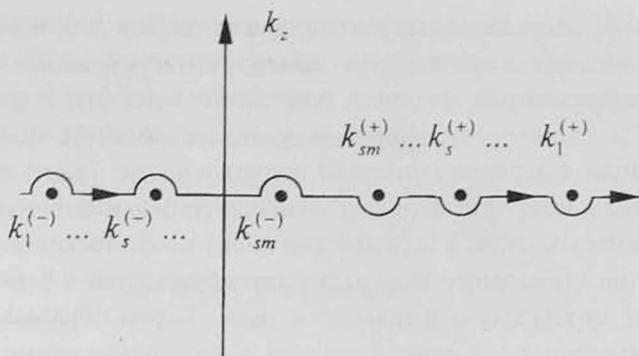


Рис.1. Контур интегрирования в комплексной плоскости k_z при $\beta_0 < 1$.

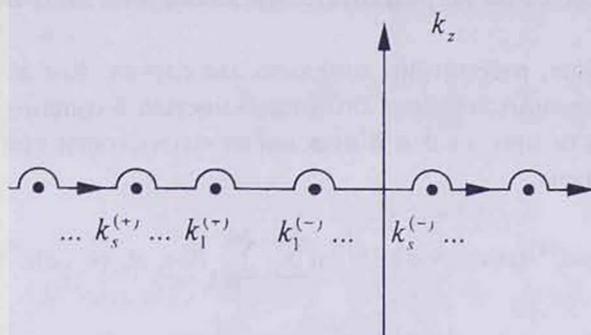


Рис.2. Контур интегрирования в комплексной плоскости k_z при $\beta_0 > 1$.

В действительности стенки волновода имеют конечную проводимость, и поэтому к волновому числу k_z добавляется дополнительная мнимая часть, которая приводит к тем же правилам обхода полюсов, что и на рис.1,2.

3. Интенсивность излучения в волноводе

Рассмотрим поле излучения, распространяющееся внутри цилиндра на больших расстояниях от заряда. Во-первых, покажем, что в (13) член, соответствующий первому слагаемому в квадратных скобках, не дает вклада в поле излучения. Это непосредственно следует из оценки интеграла по k_z в (14) методом стационарной фазы (см., например, [10]). Так как в этом интеграле фаза $k_z z$ не имеет стационарной точки, то при больших $|z|$ интеграл стремится к нулю быстрее любой степени $1/|z|$ при условии, что предэкспоненциальная функция принадлежит классу $C^\infty(R)$. Из сказанного следует, что поле излучения определяется особенностями предэкспоненциальной функции. Как уже отмечалось в предыдущем разделе, для интеграла по k_z в (14) единственными особенностями являются полюсы второго слагаемого в

(13) при $k_z = k_s^{(\pm)}$, определяемые соотношениями (18). Для нахождения соответствующих вкладов заметим, что контур интегрирования по k_z в (14) имеет вид, изображенный на рис.1 при $\beta_0 < 1$ и на рис.2 при $\beta_0 > 1$. При $z \gg v_0 t$ ($z \ll v_0 t$) контур интегрирования можно замкнуть полуокружностью большого радиуса в верхней (нижней) полуплоскости. Такой выбор обусловлен тем, что для достаточно больших z подынтегральная функция экспоненциально стремится к нулю в верхней (нижней) полуплоскости при $z > 0$ (< 0). В результате при стремлении радиусов полуокружностей к бесконечности соответствующие интегралы обращаются в нуль. Таким образом, при больших $|z|$ в (14) интеграл по k_z , согласно теореме Коши, равен сумме вычетов в полюсах, расположенных внутри контура интегрирования, умноженной на $2\pi i \operatorname{sgn} z$. При $\varepsilon_0^* \rightarrow 0$ и больших s , когда $b_{n,s}^2 > (1 - \beta_0^2)^{-1}$, полюсы $k_s^{(\pm)}$ имеют конечную мнимую часть, и соответствующий вклад экспоненциально стремится к нулю при $z \rightarrow \infty$. В результате эти полюсы не дают вклада в поле излучения.

Как и выше, рассмотрим отдельно два случая. Когда $\beta_0 < 1$, замкнув контур интегрирования на рис.1 полуокружностью большого радиуса в верхней полуплоскости при $z > 0$ и в нижней полуплоскости при $z < 0$, для поля излучения получаем

$$A_i(\rho, z, t) = \alpha A_i^{(\alpha)}(\rho, z, t) \equiv \alpha 2 \operatorname{Re} \left\{ 2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{s_m} \operatorname{Res}_{k_z=k_s^{(\alpha)}} A_{ni}(k_z, \rho) e^{ik_z z - i\omega_n(k_z)t} \right\}, \quad (24)$$

где $\alpha = +(-)$ при $z > 0$ ($z < 0$). Из неравенств (22) следует, что выражение (24) описывает волны, распространяющиеся в положительном направлении оси z при $\alpha = +$ и при $\alpha = -$, $b_{n,s} < 1$ ($k_s^{(-)} < 0$), и волны, распространяющиеся в отрицательном направлении оси z при $\alpha = -$, $1 < b_{n,s} < (1 - \beta_0^2)^{-1/2}$. Если же условие Черенкова выполняется ($\beta_0 > 1$), то, замкнув контур интегрирования на рис.2 полуокружностью большого радиуса в верхней или нижней полуплоскости в зависимости от знака z , для векторного потенциала поля излучения получаем

$$\begin{aligned} A_i(\rho, z, t) &= 0, & z &\gg v_0 t, \\ A_i(\rho, z, t) &= -\sum_{\alpha=\pm} A_i^{(\alpha)}(\rho, z, t), & z &< 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Первое равенство в (25) является следствием того, что в среднем частица опережает излученное ею поле. Теперь из неравенств (23) получаем, что выражение (25) описывает волны, распространяющиеся в положительном направлении оси z при $\alpha = +$ (с частотой $|\omega_n(k_s^{(+)})|$) и при $\alpha = -$, $b_{n,s} > 1$ ($k_s^{(+)} > 0$), и в отрицательном направлении оси z при $\alpha = -$, $b_{n,s} < 1$ ($k_s^{(-)} < 0$). Заметим, что при $b_{n,s} > 1$ волна, распространяющаяся в отрицательном направлении оси z , отсутствует.

Таким образом, внутри волновода на больших расстояниях от заряда

поле представляется в виде волн с дискретным набором значений проекции волнового вектора на ось волновода, $k_z = k_s^{(\pm)}$, $s = 1, 2, \dots$, определяемых формулами (24) и (25). Вычисление вычета по стандартной формуле комплексного анализа приводит к следующим результатам:

$$A_z^{(\alpha)}(\rho, z, t) = \alpha \frac{2\pi q}{c\rho_1^2} \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{s_m} \frac{\omega_{ns}^{(\alpha)} J_n(k_s^{(\alpha)} z_0)}{k_s^{(\alpha)} k_s J_1(j_{0,s})} \times \\ \times H_0(j_{0,s}) J_0(j_{0,s} \rho / \rho_1) \exp[i(k_s^{(\alpha)} z - \omega_{ns}^{(\alpha)} t)], \quad (26)$$

где

$$k_s = \frac{n\omega_0 \sqrt{\epsilon_0}}{c} \sqrt{1 - b_{n,s}^2 (1 - \beta_0^2)}. \quad (27)$$

Для напряженностей электромагнитного поля, соответствующих потенциалу $A_i^{(\alpha)}(\rho, z, t)$, получаем

$$E_\rho^{(\alpha)}(\rho, z, t) = -\alpha \frac{2\pi q}{\epsilon_0 \rho_1^3} \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \exp[i(k_s^{(\alpha)} z - \omega_{ns}^{(\alpha)} t)] \times \\ \times \frac{j_{0,s}^2 J_n(k_s^{(\alpha)} z_0)}{k_s J_1(j_{0,s})} H_0(j_{0,s}) J_0'(j_{0,s} \rho / \rho_1), \\ E_z^{(\alpha)}(\rho, z, t) = \alpha \frac{2\pi q i}{\epsilon_0 \rho_1^4} \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \exp[i(k_s^{(\alpha)} z - \omega_{ns}^{(\alpha)} t)] \times \\ \times \frac{j_{0,s}^3 J_n(k_s^{(\alpha)} z_0)}{k_s^{(\alpha)} k_s J_1(j_{0,s})} H_0(j_{0,s}) J_0(j_{0,s} \rho / \rho_1), \quad (28) \\ H_\varphi^{(\alpha)}(\rho, z, t) = -\alpha \frac{2\pi q}{c\rho_1^3} \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \exp[i(k_s^{(\alpha)} z - \omega_{ns}^{(\alpha)} t)] \times \\ \times \frac{\omega_{ns}^{(\alpha)} j_{0,s}^2 J_n(k_s^{(\alpha)} z_0)}{k_s^{(\alpha)} k_s J_1(j_{0,s})} H_0(j_{0,s}) J_0'(j_{0,s} \rho / \rho_1),$$

(остальные компоненты равны нулю). Напряженности полей \mathbf{E} и \mathbf{H} связаны с функциями $E^{(\alpha)}$ и $\mathbf{H}^{(\alpha)}$ формулами, аналогичными (24), (25). Рассмотрим средние потери энергии за единицу времени

$$I = -\frac{1}{T} \int_0^T dt \int j_z E_z \rho d\rho dz, \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0}. \quad (29)$$

Подставив сюда (2), (28) и имея в виду (23), получаем

$$I = \sum_{\alpha=\pm} I^{(\alpha)}, \quad I^{(\alpha)} = \frac{2q^2}{\epsilon_0 \rho_1^4} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{s_m} \frac{j_{0,s}^2 |\omega_{ns}^{(\alpha)}| J_n^2(k_s^{(\alpha)} z_0)}{k_s^{(\alpha)2} k_s J_1^2(j_{0,s})}. \quad (30)$$

При $\beta_0 < 1$ верхний предел суммирования по s определяется соотношением (19). В обратном случае этот предел определяется конкретным законом дисперсии диэлектрической проницаемости ϵ_0 . Согласно (17), необходимым условием наличия излучения на заданной гармонике n является $(n\omega_0 \rho_1 \sqrt{\epsilon_0} / c)^2 \geq j_{0,s}^2 (1 - \beta_0^2)$, а соответствующая частота равна $|\omega_{ns}^{(\alpha)}|$. Если $\beta_0 < 1$, а циклическая частота колебания заряда равна $\omega_0 = \omega_{0s} \equiv j_{0,s} c \sqrt{1 - \beta_0^2} / (n\rho_1 \sqrt{\epsilon_0})$, то k_s обращается в нуль, и интенсивность излучения, определяемая формулой (30), обращается в бесконечность. Заметим, что при заданных β_0 и n расстояние между соседними частотами $\omega_{0(s+1)} - \omega_{0s}$ уменьшается с увеличением ρ_1 . Однако в этих условиях становится важным затухание в среде и в стенках волновода, и поэтому формула (30) справедлива для частот, не слишком близких к ω_{0s} , когда $\bar{k}_s \gg \beta_\lambda, n\omega_0 \sqrt{\epsilon_0} / c$, где β_λ – постоянная затухания, обусловленная омическими потерями в стенках волновода. При $\beta_0 < 1$, воспользовавшись выражениями (18), (20) и преобразованием Лоренца, нетрудно видеть, что в системе отсчета, движущейся со средней скоростью осциллятора, проекция волнового вектора на ось цилиндра положительна при $\alpha = +$ и отрицательна при $\alpha = -$. Таким образом, в формуле (30) слагаемое $I^{(+)}$ ($I^{(-)}$) описывает интенсивность излучения волн, которые в указанной системе отсчета распространяются в положительном (отрицательном) направлении оси z .

Рассмотрим различные предельные случаи полученной общей формулы для интенсивности излучения. Пусть сначала радиус волновода принимает большие значения $\rho_1 \rightarrow \infty$ (аналогичный переход для черенковского и синхротронного излучений см., например, в [11,12]). В этом пределе основной вклад в сумму по s в (30) дают большие значения $j_{0,s}$, когда можно воспользоваться главным членом асимптотического разложения Макмагона для больших нулей $j_{0,s}$ функции Бесселя [9]: $j_{0,s} \approx \pi(s-1/4)$, $s \gg 1$ и поэтому $\Delta\lambda_0 = (j_{0,s+1} - j_{0,s}) / \rho_1 \approx \pi / \rho_1$. Для функции Бесселя в знаменателе формулы (30) при $s \gg 1$ имеем $J_1^2(j_{0,s}) \approx 2 / (\pi j_{0,s})$. Теперь, деля и умножая выражение (30) на π / ρ_1 , суммирование по s можно заменить интегрированием по λ_0 . Перейдя далее к интегрированию по углу ϑ :

$$\lambda_0 = \frac{n\omega_0}{v_0} \frac{\beta_0 \sin \vartheta}{1 - \beta_0 \cos \vartheta}, \quad (31)$$

получаем выражение для интенсивности излучения осциллятора, движущегося в однородной среде [7]. При этом, в данном пределе в случае $\beta_0 < 1$ слагаемое $I^{(+)}$ ($I^{(-)}$) описывает излучение, распространяющееся под углами $0 \leq \vartheta \leq \arccos \beta_0$ ($\arccos \beta_0 \leq \vartheta \leq \pi$). В случае же $\beta_0 > 1$ предельное выражение слагаемого $I^{(+)}$ соответствует излучению под углами $\cos \vartheta > 1 / \beta_0$ (область аномального эффекта Доплера), а $I^{(-)}$ – излучению, распространяющемуся под углами $\cos \vartheta < 1 / \beta_0$ (область нормального эффекта Доплера).

Рассмотрим случай $\omega_0 = 0$, который соответствует равномерному движению заряда по оси волновода. Теперь, согласно (6), (9) и (18), величины

$k_s^{(\pm)}$, $\omega_{ns}^{(\pm)}$ и λ_j не зависят от n , и соответствующий ряд в (30) легко суммируется с помощью известной формулы $\sum J_n^2(k_s^{(\pm)} z_0) = 1$. При $\omega_0 = 0$ величины $k_s^{(\pm)}$ являются действительными только при $\beta_0 > 1$. Таким образом, излучение имеет место только при выполнении условия Черенкова. Соответствующая частота определяется формулой

$$\omega_s = \frac{v_0 j_{0,s}}{\rho_1 \sqrt{\beta_0^2 - 1}}, \quad (32)$$

а для интенсивности излучения из формулы (30) получаем

$$I_{\omega_0=0}^{(\alpha)} = \frac{2q^2 v_0}{\epsilon_0 \rho_1^2} \sum_{\beta_0 > 1} J_1^{-2}(j_{0,s}). \quad (33)$$

Здесь суммирование по s ограничено условием $\epsilon_0(\omega_s) > c^2 / v_0^2$, и максимальное значение s зависит от конкретного закона дисперсии.

Пусть теперь $\omega_0 \neq 0$, $n=0$. Как и в предыдущем случае, излучение имеет место только при выполнении условия Черенкова $\beta_0 > 1$. Соответствующая интенсивность равна

$$I_{n=0}^{(\alpha)} = \frac{2q^2 v_0}{\epsilon_0 \rho_1^2} \sum_{\beta_0 > 1} J_0^2 \left(\frac{j_{0,s} z_0}{\rho_1 \sqrt{\beta_0^2 - 1}} \right) J_1^{-2}(j_{0,s}), \quad (34)$$

(ср. с формулой (33)).

И наконец, пусть осциллятор в среднем покоится, $v_0 = 0$. Теперь для частоты излучения имеем $\omega = n\omega_0$ и

$$k_s^{(\pm)} = \pm \sqrt{\left(\frac{n\omega_0}{c} \right)^2 \epsilon_0 - \frac{j_{0,s}^2}{\rho_1^2}} = \pm k_s. \quad (35)$$

В этой формуле верхний (нижний) знак описывает волну, распространяющуюся в положительном (отрицательном) направлении оси z . При заданном n излучение имеет место при условии $j_{0,s} < n\omega_0 \rho_1 \sqrt{\epsilon_0} / c$. Полная интенсивность излучения легко получается из общей формулы (30), где $I^{(+)} = I^{(-)}$:

$$I_{v_0=0} = \frac{4q^2 \omega_0}{\epsilon_0 \rho_1^4} \sum_{n=1}^{\infty} n \sum_{s=1}^{s_m} \frac{j_{0,s}^2 J_n^2(k_s z_0 / \rho_1)}{k_s^3 J_1^2(j_{0,s})}. \quad (36)$$

Здесь s_m определяется условием (19), когда $\beta_0 < 1$. Заметим, что в (36) указанные выше бесконечности, соответствующие $k_s = 0$, присутствуют только в слагаемом $n=1$.

По формулам (30) и (36) нами были проведены численные расчеты интенсивностей $I^{(\pm)}$ для различных значений параметров задачи. На рис.3 приведены результаты этих расчетов для $2\pi c \sqrt{\epsilon_0} I / (\omega_0^2 q^2)$ при $\beta_0 = 0$ ($I^{(+)} = I^{(-)}$) в зависимости от $\omega_0 z_0 \sqrt{\epsilon_0} / c$, при $n=1$, $\rho_1 / z_0 = 5$ (левый график)

и $n=5$, $\rho_1/z_0=1$ (правый график). Пунктирные линии изображают соответствующие величины для однородной среды. Заметим, что $\omega_0 z_0$ есть амплитуда колебаний скорости осциллятора.

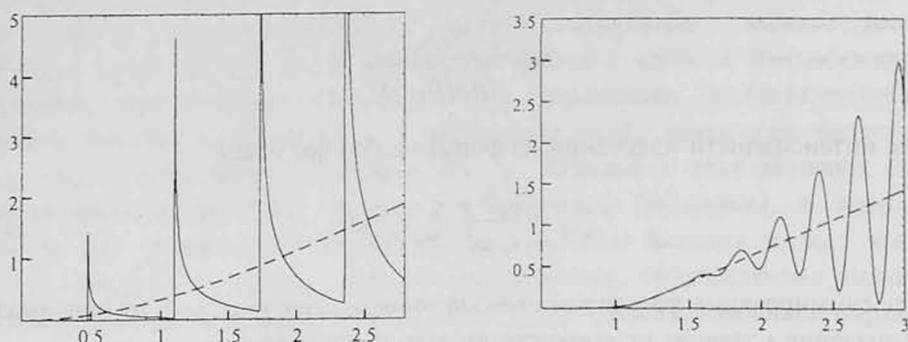


Рис.3. Зависимость величины $2\pi c\sqrt{\epsilon_0}I/(\omega_0^2q^2)$ при $\beta_0=0$ от $\omega_0 z_0\sqrt{\epsilon_0}/c$, при $n=1$, $\rho_1/z_0=5$ (левый график) и $n=5$, $\rho_1/z_0=1$ (правый график). Пунктирные линии изображают соответствующие величины для однородной среды.

Результаты численных расчетов для движущегося осциллятора изображены на рис.4, где приведена зависимость величины $2\pi c\sqrt{\epsilon_0}I^{(+)}/(\omega_0^2q^2)$ (левый рисунок) и $2\pi c\sqrt{\epsilon_0}I^{(-)}/(\omega_0^2q^2)$ (правый рисунок) от $\omega_0 z_0\sqrt{\epsilon_0}/c$ при $\beta_0=0.9$, $\rho_1/z_0=3$ на основной гармонике $n=1$. Пунктирная линия на левом (правом) рисунке описывает соответствующую величину для излучения в однородной среде, распространяющегося под углами $0 \leq \vartheta \leq \arccos \beta_0$ ($\arccos \beta_0 \leq \vartheta \leq \pi$) относительно скорости осциллятора. Из приведенных данных следует, что существуют области значений частоты осцилляций, при которых интенсивность излучения в волноводе существенно превышает соответствующую величину для излучения в однородной среде.

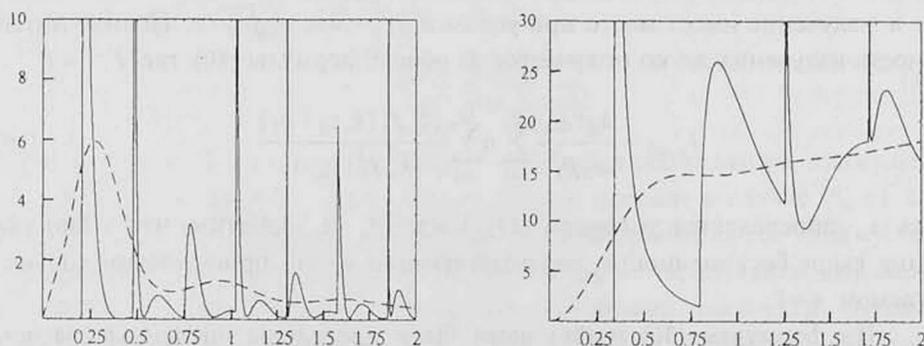


Рис.4. Зависимость величин $2\pi c\sqrt{\epsilon_0}I^{(+)}/(\omega_0^2q^2)$ (левый рисунок) и $2\pi c\sqrt{\epsilon_0}I^{(-)}/(\omega_0^2q^2)$ (правый рисунок) от $\omega_0 z_0\sqrt{\epsilon_0}/c$ при $\beta_0=0.9$, $n=1$, $\rho_1/z_0=3$.

Авторы выражают благодарность Л.Ш.Григоряну, Б.В.Хачатряну, С.Р.Арзуманяну и Г.Ф.Хачатряну за интерес к работе и многочисленные обсуждения.

Работа выполнена в рамках гранта 1361 Министерства образования и науки РА.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б.В. Хачатрян. Изв. вузов., Радиофизика, 6, 904 (1963).
2. Ф.А.Костанян, О.С.Мергелян. Изв. АН Арм. ССР, Физика, 6, 481 (1971).
3. Ф.А.Костанян, О.С.Мергелян. Изв. АН Арм. ССР, Физика, 6, 472 (1971).
4. Ф.А.Костанян, О.С.Мергелян. Изв. АН Арм. ССР, Физика, 12, 179 (1977).
5. М.М.Никитин, В.Я.Эпп. Ондюляторное излучение. М., Энергоатомиздат, 1988.
6. А.А.Соколов, И.М.Тернов. Релятивистский электрон. М., Наука, 1983.
7. А.С.Котанджян, А.А.Саарян. Изв. НАН Армении, Физика, 37, 263 (2002).
8. Л.Ш.Григорян, А.С.Котанджян, А.А.Саарян. Изв. НАН Армении, Физика, 30, 239 (1995).
9. М.Абрамовиц, И.Стиган. Справочник по специальным функциям. М., Наука, 1979.
10. М.В.Федорюк. Асимптотика: Интегралы и ряды. М., Наука, 1987.
11. Э.Д.Газазян, Э.М.Лазиев. Изв. АН Арм. ССР, Физ.-мат. науки, 16, 79 (1963).
12. А.С.Котанджян, А.А.Саарян. Изв. НАН Армении, Физика, 36, 310 (2001).

ՕՍՑԻԼՅԱՏՈՐԻ ԴԱՌԱԳԱՅԹՈՒՄԸ ԴԻԷԼԵԿՏՐԱԿԱՆ ՆՅՈՒԹՈՎ ԼՅՎԱԾ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԱԼԻԲԱՏԱՐԻ ՆԵՐՍՈՒՄ

Ա.Ա. ՍԱՀԱՐՅԱՆ, Ա.Ս. ԶՈՒՆՉՅԱՆ

Դիտարկված է համասեռ դիէլեկտրական նյութ պարունակող զլանային ալիքատարի առանցքով հավասարաչափ շարժվող լիցքավորված երկայնական օսցիլյատորի ճառագայթումը: Խնդրի համաչափությանը համապատասխան ճառագայթում են միայն TM տիպի ալիքներ: Հաշվված է ճառագայթման էներգիայի հոսքը ալիքատարի լայնական հատույթով: Բերված են համապատասխան ինտենսիվության թվային հաշվարկների արդյունքները՝ կախված ալիքատարի շառավղից, ալիքատարում պարունակվող միջավայրի դիէլեկտրական թափանցելիությունից և օսցիլյատորի պարամետրերից: Ստացված արդյունքները համեմատված են համասեռ միջավայրում օսցիլյատորի ճառագայթման ինտենսիվության հետ: Ցույց է տրված, որ գոյություն ունեն տատանման հաճախության արժեքների տիրույթներ, որոնց դեպքում ալիքատարի ներսում ճառագայթման ինտենսիվությունը էապես գերազանցում է համապատասխան մեծությանը համասեռ միջավայրում:

RADIATION FROM AN OSCILLATOR INSIDE A CYLINDRICAL WAVEGUIDE WITH DIELECTRIC FILLING

A. A. SAHARIAN, A. S. KOTANJIAN

The radiation from a longitudinal charged oscillator uniformly moving along the axis of a cylindrical waveguide filled by a homogeneous medium is considered. In accordance with the problem symmetry only the TM type waves are emitted. The radiated energy flux through the cross-section of the waveguide is calculated. The results of numerical calculations for the corresponding intensity are given in dependence of the waveguide radius, permittivity of the filling medium and oscillator parameters. A comparison is carried out with the radiation intensity of the oscillator in a homogeneous medium. It is shown that ranges of the values of the oscillator frequency exist for which the radiation intensity in the waveguide essentially exceeds the corresponding quantity in a homogeneous medium.

