

УДК 530.145

КУЛОН-ОСЦИЛЛЯТОРНАЯ ДУАЛЬНОСТЬ И 5-МЕРНАЯ ЗАДАЧА КУЛОНА

Х.Г. КАРАЯН, Л.Г. МАРДОЯН, В.М. ТЕР-АНТОНЯН

Ереванский государственный университет

(Поступила в редакцию 5 июня 2002 г.)

Показано, что преобразование Гурвица связывает задачу восьми-мерного осциллятора с 5-мерной задачей Кулона. Дан анализ 5-мерной задачи Кулона в гиперсферических и параболических координатах. Вычислены сферический и параболический базисы этой системы, выведены представления Парка и Тартера для коэффициентов сферо-параболических и парабола-сферических межбазисных разложений.

1. Введение

Хорошо известно [1], что задача об атоме водорода – в силу скрытой симметрии – факторизуется не только в сферических, но и в параболических координатах. Наличие параболического базиса позволяет построить теорию эффекта Штарка в атоме водорода [2] и развить точную теорию рассеяния заряженных частиц кулоновским полем ядра [3].

Согласно принципу суперпозиции состояний, более привычный сферический базис должен быть линейной комбинацией состояний, образующих параболические состояния. Использование этих линейных комбинаций сильно упрощает многие вычисления, относящиеся к теории водородоподобных атомов. Коэффициенты указанной выше суперпозиции состояний были вычислены в координатном представлении Тартером [4], а их связь с группой скрытой симметрии атома водорода была установлена Парком [5], доказавшим, что коэффициенты Тартера выражаются через коэффициенты Клебша-Гордана группы $SU(2)$.

В настоящей работе рассмотрена кулоновская задача в пятимерном евклидовом пространстве R^5 . Поводом к такому исследованию послужил сравнительно недавно установленный факт (названный кулон-осцилляторной дуальностью), согласно которому 8-мерный изотропный осциллятор со связью (о которой будет сказано ниже) дуален 5-мерной кулоновской задаче в дискретном спектре. Это свойство является частным случаем более общего утверждения, гласящего, что 8-мерный изотропный осциллятор (без дополнительной связи) дуален связанной сис-

теме заряд-дион. Напомним, что дион в R^5 – это гипотетическая частица, которая является источником как электрического, так и неабелева магнитного поля [6-9]. Подобные объекты предсказываются современными схемами великого объединения [10,11].

Статья построена следующим образом. В §2 дано краткое описание аргументов, приводящих к кулон-осцилляторной дуальности. В §3 получены волновые функции 5-мерной кулоновской задачи (для связанных состояний) в гиперсферических и параболических координатах определенных типов. В §4 выведена формула, обобщающая результат Парка – Тартера на случай R^5 . В заключении мы возвращаемся к дион-осцилляторной дуальности и приводим дополнительную информацию, относящуюся к этому в высшей степени интересному свойству.

2. Кулон-осцилляторная дуальность

Рассмотрим преобразование Гурвица [12]:

$$\begin{aligned}x_0 &= u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 - u_4^2 - u_5^2 - u_6^2 - u_7^2, \\x_2 + ix_1 &= 2[(u_0 + iu_1)(u_5 + iu_4) + (u_2 - iu_3)(u_7 - iu_6)], \\x_4 + ix_3 &= 2[(u_0 + iu_1)(u_7 + iu_6) - (u_2 - iu_3)(u_5 - iu_4)].\end{aligned}\quad (1)$$

Здесь u_μ ($\mu = 0, 1, \dots, 7$) – координаты пространства $R^8(u_\mu)$, а x_i ($i = 0, 1, \dots, 4$) – пространства $R^5(x_i)$. Из (1) легко заметить, что имеет место равенство

$$\begin{aligned}u^4 &= (u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2 + u_6^2 + u_7^2)^2 = \\&= x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = r^2,\end{aligned}\quad (2)$$

которое называется тождеством Эйлера. Согласно [12] связь между операторами Лапласа в пространствах $R^8(u_\mu)$ и $R^5(x_i)$ имеет вид

$$\Delta_8 = 4r\Delta_5 - \frac{4}{r}\bar{J}^2, \quad (3)$$

где $\bar{J}^2 = \bar{J}_1^2 + \bar{J}_2^2 + \bar{J}_3^2$, а

$$\bar{J}_1 = \frac{i}{2} \left(u_1 \frac{\partial}{\partial u_0} - u_0 \frac{\partial}{\partial u_1} + u_3 \frac{\partial}{\partial u_2} - u_2 \frac{\partial}{\partial u_3} + u_5 \frac{\partial}{\partial u_4} - u_4 \frac{\partial}{\partial u_5} + u_7 \frac{\partial}{\partial u_6} - u_6 \frac{\partial}{\partial u_7} \right),$$

$$\bar{J}_2 = \frac{i}{2} \left(u_2 \frac{\partial}{\partial u_0} - u_3 \frac{\partial}{\partial u_1} - u_0 \frac{\partial}{\partial u_2} + u_1 \frac{\partial}{\partial u_3} - u_6 \frac{\partial}{\partial u_4} + u_7 \frac{\partial}{\partial u_5} + u_4 \frac{\partial}{\partial u_6} - u_5 \frac{\partial}{\partial u_7} \right),$$

$$\bar{J}_3 = \frac{i}{2} \left(u_3 \frac{\partial}{\partial u_0} + u_2 \frac{\partial}{\partial u_1} - u_1 \frac{\partial}{\partial u_2} - u_0 \frac{\partial}{\partial u_3} - u_7 \frac{\partial}{\partial u_4} - u_6 \frac{\partial}{\partial u_5} + u_5 \frac{\partial}{\partial u_6} + u_4 \frac{\partial}{\partial u_7} \right).$$

Пользуясь явным видом операторов $\hat{J}_a$, можно прямым вычислением показать, что они удовлетворяют коммутационным соотношениям $[\hat{J}_a, \hat{J}_b] = i\epsilon_{abc}\hat{J}_c$, где $a, b, c = 1, 2, 3$.

Теперь свяжем 8-мерную задачу изотропного осциллятора

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu_0}\Delta_8 + \frac{\mu_0\omega^2 u^2}{2}\right)\psi(u_\mu) = E\psi(u_\mu), \quad (4)$$

$$E = \hbar\omega(N+4), \quad N = 0, 1, 2, \dots, \quad (5)$$

где N – главное квантовое число, с 5-мерной задачей Кулона. Так как операторы $\hat{J}_a$ не зависят от координат x_i , допустим, что мы можем волновую функцию $\psi(u_\mu)$ 8-мерного изотропного осциллятора представить в следующем факторизованном виде:

$$\psi(u_\mu) = \psi(x_i)\Phi(\Omega_a), \quad (6)$$

где через Ω_a обозначим углы, от которых зависят операторы $\hat{J}_a$, а $\Phi(\Omega_a)$ является собственной функцией оператора $\hat{J}^2$, т.е.

$$\hat{J}^2 \Phi(\Omega_a) = J(J+1)\Phi(\Omega_a). \quad (7)$$

Здесь $J(J+1)$ – собственные значения оператора $\hat{J}^2$. Теперь, подставляя в (4) формулу (3) и учитывая соотношения (6) и (7), приходим к уравнению

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu_0}\Delta_5 - \frac{e^2}{r} + \frac{\hbar^2}{2\mu_0 r^2} J(J+1)\right)\psi(x_i) = \varepsilon\psi(x_i), \quad (8)$$

где $\varepsilon = -\mu_0\omega^2/8$, а $4e^2 = E$. Таким образом, мы получили, что 8-мерный изотропный осциллятор дуален бесконечному числу 5-мерных кулоновских систем с дополнительным членом $1/r^2$ и константой связи $\hbar^2 J(J+1)/2\mu_0$. При $J=0$ мы получим уравнение для 5-мерной задачи Кулона:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu_0}\Delta_5 - \frac{e^2}{r}\right)\psi(x_i) = \varepsilon\psi(x_i). \quad (9)$$

Условие $J=0$ равносильно требованию $\hat{J}_a\psi(x)=0$. Кроме того, из (1) следует, что $\psi(x)$ есть четная функция переменных u_μ : $\psi(x_i, (-u_\mu)) = \psi(x_i, (u_\mu))$. Поэтому любое решение уравнения (9) $\psi(x_i)$ может быть разложено по полной системе четных решений $\psi_{N\alpha}(u_\mu)$ (α – остальные квантовые числа) уравнения (4), т.е.

$$\psi_n(x_i) = \sum_{\alpha} C_{n\alpha} \psi_{N\alpha}(u_\mu), \quad \text{где} \quad N = 2n. \quad (10)$$

Нетрудно убедиться, что n совпадает с главным квантовым чис-

лом 5-мерной задачи Кулона. Действительно, подставляя в (5) соотношения $E = 4e^2$ и (10), получим

$$\omega_n = \frac{2e^2}{\hbar(n+2)}. \quad (11)$$

Таким образом, в нашем случае энергия осциллятора фиксирована и квантуется частота ω . Подставляя теперь (11) в условие $\varepsilon = -\mu_0 \omega^2/8$, приходим к выражению

$$\varepsilon_n = -\frac{\mu_0 e^4}{2\hbar^2(n+2)^2}, \quad (12)$$

в которое при $d=5$ переходит формула

$$\varepsilon_n = -\frac{\mu_0 e^4}{2\hbar^2 \left(n + \frac{d-1}{2}\right)^2},$$

справедливая для d -мерной кулоновской задачи [13].

3. 5-мерные сферические и параболические связанные состояния

Как уже было показано, преобразование Гурвица (1) 8-мерный изотропный осциллятор со связью $\bar{J}_\alpha \psi(u_\mu) = 0$ переводит в 5-мерную задачу Кулона (9). Собственные значения энергии (12) вырождены и кратность вырождения равна

$$g_n = \frac{(n+1)(n+3)(n+2)^2}{12}.$$

5-мерные гипersферические координаты $r \in [0, \infty)$, $\theta \in [0, \pi]$, $\alpha \in [0, 2\pi]$, $\beta \in [0, \pi]$, $\gamma \in [0, 4\pi)$ в $R^5(x)$ введем следующим образом:

$$x_0 = r \cos \theta, \quad x_2 + ix_1 = r \sin \theta \sin \frac{\beta}{2} e^{i\frac{\alpha-\gamma}{2}}, \quad x_4 + ix_3 = r \sin \theta \cos \frac{\beta}{2} e^{i\frac{\alpha+\gamma}{2}}. \quad (13)$$

Оператор Лапласа в координатах (13) имеет вид

$$\Delta_5 = \frac{1}{r^4} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^4 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^3 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin^3 \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) - \frac{4}{r^2 \sin^2 \theta} \tilde{L}^2,$$

где

$$\tilde{L}^2 = - \left[\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \cot \beta \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\sin^2 \beta} \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - 2 \cos \beta \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \gamma} + \frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} \right) \right].$$

Компоненты оператора момента $\hat{L}$ имеют вид

$$\begin{aligned}\tilde{L}_1 &= i \left(\cos \alpha \cot \beta \frac{\partial}{\partial \alpha} + \sin \alpha \frac{\partial}{\partial \beta} - \frac{\cos \alpha}{\sin \beta} \frac{\partial}{\partial \gamma} \right), \\ \tilde{L}_2 &= -i \left(\sin \alpha \cot \beta \frac{\partial}{\partial \alpha} - \cos \alpha \frac{\partial}{\partial \beta} - \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \frac{\partial}{\partial \gamma} \right), \\ \tilde{L}_3 &= i \frac{\partial}{\partial \alpha}, \quad \tilde{L}_3' = i \frac{\partial}{\partial \gamma}.\end{aligned}$$

Операторы $\tilde{L}^2, \tilde{L}_3, \tilde{L}_3'$ взаимно коммутируют и их собственная функция есть один из основных объектов квантовой теории углового момента — $D_{mm'}^L(\alpha, \beta, \gamma)$ -функция Вигнера [14]. Исходя из этого в координатах (13) схеме разделения переменных в уравнении Шредингера для 5-мерной задачи Кулона соответствует следующая факторизация:

$$\psi(r, \theta, \alpha, \beta, \gamma) = R(r) Z(\theta) D_{mm'}^L(\alpha, \beta, \gamma).$$

Теперь, подставляя (14) в уравнение Шредингера (9), записанное в гиперсферических координатах (13), и учитывая, что

$$\tilde{J}^2 D_{mm'}^L(\alpha, \beta, \gamma) = J(J+1) D_{mm'}^L(\alpha, \beta, \gamma),$$

приходим к следующему, нормированному на единицу, сферическому базису 5-мерной задачи Кулона:

$$\psi_{n\lambda L mm'}(r, \theta, \alpha, \beta, \gamma) = \sqrt{\frac{2L+1}{2\pi^2}} R_{n\lambda}(r) Z_{\lambda L}(\theta) D_{mm'}^L(\alpha, \beta, \gamma), \quad (14)$$

где

$$Z_{\lambda L}(\theta) = 2^{2L+1} \Gamma\left(2L + \frac{3}{2}\right) \sqrt{\frac{(2\lambda+3)(\lambda-2L)!}{2\pi(\lambda+2L+2)!}} (\sin \theta)^{2L} C_{\lambda-2L}^{2L+3/2}(\cos \theta),$$

$$R_{n\lambda}(r) = \frac{4}{(n+2)^3} \sqrt{\frac{(n+\lambda+3)!}{a^5(n-\lambda)!}} \frac{(2\kappa r)^\lambda}{(2\lambda+3)!} e^{-\kappa r} F(-n+\lambda; 2\lambda+4; 2\kappa r).$$

Здесь C_n^λ — полином Гегенбауэра, $\kappa = \sqrt{-2\mu_0 \varepsilon / \hbar^2} = 1/a(n+2)$, $a = \hbar^2 / \mu_0 e^2$ — радиус Бора, а квантовые числа λ и n принимают значения $\lambda = 2L, 2L+2, \dots, n$; $n = \lambda, \lambda+1, \dots$

В $R^5(x_i)$ определим 5-мерные параболические координаты следующим образом:

$$x_0 = \frac{1}{2}(\mu - \nu), \quad x_2 + ix_1 = \sqrt{\mu\nu} \sin \frac{\beta}{2} e^{i\frac{\alpha-\gamma}{2}}, \quad x_4 + ix_3 = \sqrt{\mu\nu} \cos \frac{\beta}{2} e^{i\frac{\alpha+\gamma}{2}}, \quad (15)$$

где $\mu, \nu \in [0, \infty)$. В координатах (15) оператор Лапласа имеет вид

$$\Delta_5 = \frac{4}{\mu + \nu} \left[\frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu} \right) + \frac{1}{\nu} \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\nu^2 \frac{\partial}{\partial \nu} \right) \right] - \frac{4}{\mu\nu} \tilde{L}^2.$$

Исходя из произведения

$$\psi(\mu, \nu, \alpha, \beta, \gamma) = e^{-\kappa(\mu+\nu)/2} (\mu\nu)^L f_1(\mu) f_2(\nu) D_{mm'}^L(\alpha, \beta, \gamma),$$

для функций f_1 и f_2 получим уравнение вырожденной гипергеометрической функции

$$y_1 \frac{d^2 f_1}{dy_1^2} + (2L+2-y_1) \frac{df_1}{dy_1} - \left(L+1 - \frac{\sqrt{\mu_0}}{2\kappa\hbar} \beta - \frac{\mu_0 e^2}{2\kappa\hbar^2} \right) f_1 = 0,$$

$$y_2 \frac{d^2 f_2}{dy_2^2} + (2L+2-y_2) \frac{df_2}{dy_2} - \left(L+1 + \frac{\sqrt{\mu_0}}{2\kappa\hbar} \beta - \frac{\mu_0 e^2}{2\kappa\hbar^2} \right) f_2 = 0,$$

где $y_1 = \kappa\mu$, $y_2 = \kappa\nu$, а β – параболическая постоянная разделения. Нас интересуют связанные состояния, и поэтому вырожденные гипергеометрические функции обрываются, т.е.

$$n_1 = -L-1 + \frac{\sqrt{\mu_0}}{2\kappa\hbar} \beta + \frac{\mu_0 e^2}{2\kappa\hbar^2}, \quad n_2 = -L-1 - \frac{\sqrt{\mu_0}}{2\kappa\hbar} \beta + \frac{\mu_0 e^2}{2\kappa\hbar^2},$$

где n_1 и n_2 – целые неотрицательные числа. Теперь, учитывая (12), из последних соотношений получим, что параболические квантовые числа n_1 и n_2 связаны с главным квантовым числом n следующим образом: $n = n_1 + n_2 + 2L$. Нормированный на единицу параболический базис имеет вид

$$\psi_{n, n_1, l, mm'}(\mu, \nu, \alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{(n+2)^2} \sqrt{\frac{2L+1}{\pi^2 a^5}} \Phi_{n_1, L}(\mu) \Phi_{n_2, L}(\nu) D_{mm'}^L(\alpha, \beta, \gamma), \quad (16)$$

где

$$\Phi_{pq}(x) = \sqrt{\frac{(p+2q+1)!}{p!}} \frac{(\kappa x)^q}{(2q+1)!} e^{-\kappa x/2} F(-p; 2q+2; \kappa x).$$

4. Обобщенное разложение Парка–Тартера

Теперь, при фиксированном значении энергии, мы можем параболические связанные состояния (16) записать как когерентную квантовую смесь гиперсферических связанных состояний (14):

$$\psi_{n, n_2, l, mm'}(\mu, \nu, \alpha, \beta, \gamma) = \sum_{\lambda=2L}^n W_{n, n_2, L}^{\lambda} \psi_{n\lambda l, mm'}(r, \theta, \alpha, \beta, \gamma). \quad (17)$$

Разложение (17) обобщает на 5-мерный случай разложение Парка–Тартера [4,5] из теории атома водорода.

Цель этого параграфа заключается в нахождении точного выраже-

ния для амплитуд $W_{n_1 n_2 L}^\lambda$. Вначале заметим, что гиперсферические и параболические координаты связаны между собой соотношениями $\mu = r(1 + \cos \theta)$, $\nu = r(1 - \cos \theta)$. Потом, подставляя $\theta = 0$, учитывая, что

$$C_n^\nu(1) = \frac{\Gamma(n+2\nu)}{n! \Gamma(2\nu)},$$

и пользуясь условием ортогональности радиальных волновых функций по гипермоменту [15]

$$\int_0^\infty r^2 R_{n\lambda}(r) R_{n'\lambda}(r) dr = \frac{2}{a^2(n+2)^3} \frac{\delta_{\lambda\lambda'}}{2\lambda+3},$$

приходим к следующему интегральному представлению для обобщенных амплитуд Парка-Тартера:

$$W_{n_1 n_2 L}^\lambda = \frac{K_{\lambda L}^{nn_1}}{(2L+1)!(2\lambda+3)!} \left[\frac{(2\lambda+3)(\lambda-2L)!(n+\lambda+3)!(n_1+2L+1)!(n_2+2L+1)!}{(n_1)!(n_2)!(n-\lambda)!(\lambda+2L+2)!} \right]^{1/2}.$$

Здесь

$$K_{\lambda L}^{nn_1} = \int_0^\infty e^{-x} x^{\lambda+2L+2} F(-n_1; 2L+2; x) F(-n+\lambda; 2\lambda+4; x) dx,$$

где $x = 2\kappa r$. Интеграл легко вычисляется и для коэффициентов $W_{n_1 n_2 L}^\lambda$ получим

$$W_{n_1 n_2 L}^\lambda = \frac{(n-2L)!}{(2L+1)!} \left[\frac{(2\lambda+3)(\lambda+2L+2)!(n_1+2L+1)!(n_2+2L+1)!}{(n_1)!(n_2)!(\lambda-2L)!(n-\lambda)!(n+\lambda+3)!} \right]^{1/2} \times \\ \times {}_3F_2 \left\{ \begin{matrix} -n_1, -\lambda+2L, \lambda+2L+3 \\ 2L+2, -n+2L \end{matrix} \middle| 1 \right\}.$$

Коэффициенты $W_{n_1 n_2 L}^\lambda$ могут быть выражены через коэффициенты Клебша-Гордана. В самом деле, известно [14], что коэффициенты $C_{a\alpha; b\beta}^{c\gamma}$ Клебша-Гордана группы $SU(2)$ выражаются через обобщенную гипергеометрическую функцию ${}_3F_2$ следующим образом:

$$C_{a\alpha; b\beta}^{c\gamma} = (-1)^{a-\alpha} \delta_{\gamma, a+\beta} \left[\frac{(2c+1)(b-a+c)!(a+\alpha)!(b+\beta)!(c+\gamma)!}{(a-\alpha)!(b-\beta)!(c-\gamma)!(a+b-c)!(a-b+c)!(a+b+c+1)!} \right]^{1/2} \times \\ \times \frac{(a+b-\gamma)!}{(b-a+\gamma)!} {}_3F_2 \left\{ \begin{matrix} -a+\alpha, c+\gamma+1, -c+\gamma \\ \gamma-a-b, b-a+\gamma+1 \end{matrix} \middle| 1 \right\}.$$

Сравнивая последние две формулы, имеем

$$W_{n_1 n_2 L}^\lambda = (-1)^{n_1} C_{\frac{n+1}{2}, \frac{2L+n_2-n_1+1}{2}; \frac{n+1}{2}, \frac{2L+n_1-n_2+1}{2}}^{\lambda+1, 2L+1}.$$

6. Заключение

Выше была построена теория связанных состояний заряженной квантовой частицы, движущейся в кулоновском поле, в R^5 . Эта задача, с физической точки зрения, была спровоцирована дион-осцилляторной дуальностью, присущей математической структуре квантовой механики и доказывающей, что в ее рамках есть место неабелевым магнитным монополям. Свойство дион-осцилляторной дуальности присуще не только отображению $R^8 \rightarrow R^5$, но и отображениям $R^1 \rightarrow R^1$, $R^2 \rightarrow R^2$ и $R^4 \rightarrow R^3$, причем в первых двух случаях на выходе возникают одномерный и двумерный анион, а в третьем – абелев монополю Дирака [9]. Отображение $R^4 \rightarrow R^3$ связывает квантополевою модель Φ^4 с квантовомеханической задачей об эффекте Штарка. Тем самым устанавливается мост между квантополевыми и квантовомеханическими методами. Далее, дион-осцилляторная дуальность позволяет выявить многие связи между группами симметрий осциллятора и кулоновского поля. В частности, результат настоящей статьи позволяет обобщить задачу и вывести группу скрытой симметрии монополя Янга [8].

Данная работа выполнена при поддержке гранта ANSEF № PS124-01.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Квантовая механика. М., Наука, 1974.
2. Г.Бете, Э.Солпитер. Квантовая механика атомов с одним и двумя электронами. М., Физматгиз, 1960.
3. Н.Ф.Мотт, Г.Мессе. Теория атомных столкновений. М., ИЛ, 1951.
4. С.В.Tarter. J. Math. Phys., 11, 3192 (1970).
5. D.Park. Z. Phys., 159, 155 (1960).
6. L.G.Mardoyan, A.N.Sissakian, V.M.Ter-Antonyan. Phys. Atom. Nucl., 61, 1859 (1998).
7. L.G.Mardoyan, A.N.Sissakian, V.M.Ter-Antonyan. Mod. Phys. Lett., A14, 1303 (1999).
8. C.N.Yang. J. Math. Phys., 19, 320 (1978).
9. V.M.Ter-Antonyan. Dion-oscillator duality. Proc. of the Int. School "Symmetries and integrable systems". Dubna, Russia, June 8-11, 1999.
10. Т.Ченг, Л.Ли. Калибровочные теории в физике элементарных частиц. М., Наука, 1987.
11. J.A.Harvey. Magnetic monopoles, duality and supersymmetry. EFI-96-06, hep-th/960386.
12. L.S.Davtyan, L.G.Mardoyan, G.S.Pogosyan, A.N.Sissakian, V.M.Ter-Antonyan. J. Phys., A20, 6121 (1987).
13. С.П.Аллилуев. ЖЭТФ, 33, 200 (1957).
14. Д.А.Варшавский, А.Н.Москалев, В.К.Херсонский. Квантовая теория углового момента. Л., Наука, 1975.
15. Л.Г.Мардоян, Г.С.Погосян, В.М.Тер-Антонян. Изв. АН Арм. ССР, Физика, 19, 3 (1984).

ԿՈՒԼՈՆ-ՕՍՑԻԼԵՅԱՏՈՐԱՅԻՆ ԴՈՒՍԼՈՒԹՅՈՒՆԸ
ԵՎ 5-ՉԱՓԱՆԻ ԿՈՒԼՈՆԻ ԽՆԴԻՐԸ

Խ.Հ. ԿԱՐԱՅԱՆ, Լ.Գ. ՄԱՐԴՈՅԱՆ, Վ.Մ. ՏԵՐ-ԱՆՏՈՆՅԱՆ

Ցույց է տրված, որ Հուրվիցի ձևափոխությունը ութ չափանի օսցիլատորի խնդիրը կապում է հինգ չափանի Կուլոնի խնդրի հետ: Տրված է հինգ չափանի Կուլոնի խնդրի վերլուծությունը հիպերսֆերիկ և պարաբոլիկ կոորդինատներում: Հաշվված են այդ համակարգի սֆերիկ և պարաբոլիկ բազիսները, ստացված են Փարկի և Թարթերի ներկայացումները սֆերա-պարաբոլիկ և պարաբոլա-սֆերիկ միջբազիսային վերլուծությունների գործակիցների համար:

COULOMB-OSCILLATOR DUALITY AND 5-DIMENSIONAL
COULOMB PROBLEM

KH.H. KARAYAN, L.G. MARDOYAN, V.M. TER-ANTONYAN

It is shown that the Hurwitz transformation connects the eight-dimensional oscillator problem with the five-dimensional Coulomb problem. The hyperspherical and parabolic coordinates are applied for analyzing the five-dimensional Coulomb problem. We calculate the spherical and parabolic bases for this system, derive the Park's and Tarter's representations for the coefficients of the spherical-parabolic and parabolic-spherical interbasis expansions.