

УДК 539.2

МЕТОД КОМПЛЕКСНОЙ АМПЛИТУДЫ РАССЕЯНИЯ В КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

Д.М. СЕДРАКЯН, А.Ж. ХАЧАТРЯН

Ереванский государственный университет

Государственный инженерный университет Армении

(Поступила в редакцию 29 октября 2001 г.)

Рассмотрено квантовомеханическое движение электрона в поле произвольного центрально-симметричного потенциала. Показано, что задача нахождения парциальных волн для волновой функции электрона, рассеивающегося на потенциале, может быть сведена к решению радиального дифференциального уравнения Шредингера с начальными условиями. Для связанных электронных состояний найдено уравнение, определяющее их энергетический спектр. Показано, что если спектр связанных состояний известен, то задача нахождения волновой функции связанных состояний также сводится к задаче решения уравнения Шредингера с заданными начальными условиями. Проведено также обобщение предложенного подхода для движения электрона в поле произвольного потенциала с цилиндрической симметрией.

1. Введение

Задачи одноканального рассеяния электрона и нахождения спектра связанных состояний для локальных потенциалов произвольного вида являются одними из центральных задач квантовой механика [1]. Как известно, особо важны эти задачи в атомной физике и в физике атомного ядра [1-3]. Однако в последнее время наблюдается повышенный интерес к задачам данного класса в физике твердого тела. Это связано с возросшими возможностями нанотехнологии по созданию систем со всевозможными встроенными потенциалами, связанными с характером модуляции краев валентной зоны и зоны проводимости в объеме структуры. Последнее достигается путем композиции двух или нескольких структурных элементов, или же неоднородной степенью легирования одного элемента внутри его объема [4-8].

В настоящее время в связи с задачами прикладного плана, а также причинами фундаментального характера возникла необходимость изучения физических явлений в плоских (квазидвумерных) [9,10], цилиндрических (квазиодномерных) [11-13] и сферических (квазинульмер-

ных) [14,15] квантовых ямах, связанных с поведением квазичастиц и их взаимодействием. В отличие от потенциалов, рассматриваемых в ядерной физике, которые имеют заранее заданный вид, современные технологии выращивания полупроводниковых наноструктур, благодаря широкой вариации параметров композиционных материалов структуры, сделали возможным создание искусственных потенциалов с наперед заданными структурными характеристиками [16].

В связи с вышесказанным представляет интерес рассмотрение движения квантовой частицы в поле одномерного потенциала произвольного вида, а также в произвольных потенциальных полях, обладающих цилиндрической и сферической симметриями. Задача одномерного движения электрона в общем виде рассмотрена в работах [17,18], где показано, что задача нахождения волновых функций как финитного, так и инфинитного стационарных движений, а также спектра связанных состояний может быть сформулирована как задача Коши для одномерного уравнения Шредингера. В данной работе мы развиваем подход, аналогичный подходу, развитому в [17,18], для рассмотрения движения электрона в произвольном поле, обладающем центральной симметрией.

Кроме стандартного метода, изложенного в учебниках по квантовой механике для рассмотрения движения электрона в поле центрально-симметричного потенциала, заслуживает внимания метод фазовых функций, предложенный примерно 35 лет тому назад [19,20]. В этом методе предлагается вместо решения уравнения Шредингера для парциальной волновой функции рассматривать уравнение для фазовой функции, которое является нелинейным уравнением типа Риккати. Важным положительным элементом данного подхода, основанным на методе инвариантного погружения, впервые предложенном В.А.Амбарцумяном [21], является сведение граничной задачи для уравнения Шредингера к задаче Коши для фазового уравнения. Вместе с тем, основным недостатком этого подхода по сравнению со стандартным методом является то, что рассматриваемые в нем уравнения являются нелинейными. Последнее обстоятельство затрудняет решение задачи и лишает возможности использования известных теорем и методов теории линейных дифференциальных уравнений.

Цель данной работы – показать, что может быть предложен новый подход – метод комплексной амплитуды рассеяния, который позволяет, как и метод фазовых функций, свести рассматриваемую задачу к задаче Коши, однако предлагаемые здесь уравнения являются линейными. Как мы покажем ниже, квантовомеханическая задача движения частицы в произвольном центрально-симметричном поле может быть сведена к задаче интегрирования двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка с заданными начальными условиями.

2. Уравнения для действительной и мнимой частей амплитуды рассеяния

Как известно, волновая функция частицы $\psi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r}) \exp\{-i/\hbar Et\}$, совершающей стационарное движение в поле центрально-симметричного потенциала $u(\mathbf{r}) \equiv u(r)$, может быть представлена как суперпозиция парциальных волн:

$$\psi(r, \theta, \varphi) = \sum_{l, m} \frac{u_l(r)}{r} Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (1)$$

где $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ есть известные сферические функции, а функция $u_l(r)$ удовлетворяет следующему уравнению:

$$\frac{d^2 u_l(r)}{dr^2} + \left[k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} - V(r) \right] u_l(r) = 0, \quad (2)$$

где $k^2 = 2m/\hbar^2 E$ и $V(r) = 2m/\hbar^2 u(r)$. При $V(r) = 0$ двумя линейно независимыми решениями уравнения (2) являются функции $h_l^{(1)}$ и $h_l^{(2)}$, выражающиеся через функции Ганкеля полуцелого порядка следующим образом:

$$h_l^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{\pi x}{2}} H_{l+1/2}^{(1)}(x), \quad h_l^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{\pi x}{2}} H_{l+1/2}^{(2)}(x), \quad (3)$$

где $x = kr$. Эти функции могут быть представлены также в виде линейной комбинации функций Риккати – Бесселя: $h_l^{(1)}(x) = j_l(x) + in_l(x)$ и $h_l^{(2)}(x) = j_l(x) - in_l(x)$, где $j_l(x)$ и $n_l(x)$ связаны с функциями Бесселя и Неймана полуцелого порядка:

$$j_l(x) = \sqrt{\frac{\pi x}{2}} J_{l+1/2}(x), \quad n_l(x) = \sqrt{\frac{\pi x}{2}} N_{l+1/2}(x). \quad (4)$$

При $V(r) \neq 0$ действительное решение уравнения (2) будем искать в виде

$$u_l(r) = 1/2 [A_l(r) h_l^{(1)}(kr) + A_l^*(r) h_l^{(2)}(kr)], \quad (5)$$

где $A_l(r)$ – комплексная амплитуда рассеяния. Выражая в (5) $h_l^{(1)}(kr)$, $h_l^{(2)}(kr)$ через $j_l(kr)$, $n_l(kr)$, для $u_l(r)$ получим следующее выражение:

$$u_l(r) = a_l(r) j_l(kr) - b_l(r) n_l(kr), \quad (6)$$

где введены обозначения

$$a_l(r) = \text{Re } A_l(r), \quad b_l(r) = \text{Im } A_l(r), \quad (7)$$

которые являются действительной и мнимой частями комплексной амплитуды рассеяния $A_l(r)$.

Продифференцируем выражение (6) по r и потребуем выполнения условия

$$j_l(kr) \frac{da_l(r)}{dr} = n_l \frac{db_l(r)}{dr}. \quad (8)$$

Тогда

$$\frac{du_l(r)}{dr} = a_l(r) \frac{dj_l(kr)}{dr} - b_l(r) \frac{dn_l(kr)}{dr}. \quad (9)$$

Из (8)-(9) для определения функций $a_l(r)$ и $b_l(r)$ получим следующую систему линейных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} \frac{da_l(r)}{dr} &= -\frac{V(r)n_l(kr)}{k} [a_l(r)j_l(kr) - b_l(r)n_l(kr)], \\ \frac{db_l(r)}{dr} &= -\frac{V(r)j_l(kr)}{k} [a_l(r)j_l(kr) - b_l(r)n_l(kr)]. \end{aligned} \quad (10)$$

Из уравнений (10) видно, что в областях со значением потенциала $V(r) = 0$ функции $a_l(r)$ и $b_l(r)$ принимают постоянные значения. В рамках изложенного подхода, вместо решения уравнения Шредингера предлагается решить систему уравнений (10).

В работах [19,20] предлагается вместо функций $a_l(r)$ и $b_l(r)$, которые, как было отмечено, являются действительной и мнимой частями комплексной амплитуды рассеяния, определять амплитуду и фазу этой функции: $A_l(r) = |A_l(r)| \exp\{i\delta_l(r)\}$. Однако уравнения, которым удовлетворяют функции $\delta_l(r)$ и $|A_l(r)|$, удовлетворяют нелинейным уравнениям Риккати. На наш взгляд, такое предложение не конструктивно, так как знание функций $a_l(r)$ и $b_l(r)$, которые являются решениями линейных уравнений, непосредственно определяет как фазу, так и модуль комплексной амплитуды рассеяния:

$$|A_l(r)| = \sqrt{a_l^2(r) + b_l^2(r)}, \quad \text{tg } \delta_l(r) = b_l(r) / a_l(r). \quad (11)$$

С другой стороны, стандартный подход для определения комплексной амплитуды рассеяния опирается на решения уравнения Шредингера (2) для определения радиальной волновой функции $u_l(r)$. Согласно (9) и (11), $a_l(r)$ и $b_l(r)$ могут быть выражены через функции $u_l(r)$ и их производные следующим образом:

$$a_l(r) = \frac{1}{k} \left[u_l(r) \frac{dn_l(r)}{dr} - n_l(r) \frac{du_l(r)}{dr} \right], \quad (12)$$

$$b_l(r) = \frac{1}{k} \left[u_l(r) \frac{dj_l(r)}{dr} - j_l(r) \frac{du_l(r)}{dr} \right]. \quad (13)$$

Тогда знание $u_l(r)$ определяет $\delta_l(r)$ и $|A_l(r)|$ согласно (12), (13).

3. Метод погружения и начальные условия для функций $a_l(r)$, $b_l(r)$, $u_l(r)$

В работах [19,20] было показано, что амплитуда рассеяния $A_l(r)$ как функция от r может быть интерпретирована как амплитуда рассеяния для последовательно обрезанных потенциалов (метод погружения):

$$V(r, R) = V(r)\theta(R-r), \quad \theta(x > 0) = 1 \text{ и } \theta(x < 0) = 0. \quad (14)$$

Соотношения (8), (9) обеспечивают непрерывность волновой функции во всех точках. Заметим, что функции $a_l(r)$ и $b_l(r)$ при $r > R$ принимают постоянные значения $a_l(r)$ и $b_l(r)$. Согласно вышесказанному, с учетом (7), $a_l(r)$ и $b_l(r)$ определяют фазу и амплитуду волновой функции для последовательности «обрезанных» потенциалов различного радиуса действия (14).

Из такой постановки задачи следует, что система уравнений (12), (13) должна решаться с некоторыми заданными в точке $r=0$ начальными условиями для функций $a_l(r)$ и $b_l(r)$. Заметим, что условие $R=0$ соответствует полному отсутствию взаимодействия. Начальные условия для функции $a_l(r)$ и $b_l(r)$ зависят от поведения $V(r)$ на малых расстояниях. В связи с этим рассмотрим следующие два случая.

Первый случай: потенциал несингулярен или слабо сингулярен, т.е.

$$r^2 V(r) \rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow 0, \quad (15)$$

для которого начальные условия задаются в некоторой точке $r=r_0$ в виде

$$a_l(r_0) = 1 \text{ и } b_l(r_0) = 0, \quad (16)$$

где r_0 должно быть выбрано согласно условию $V(r_0)r_0^2 \ll 1$.

Второй случай: сильно сингулярный отталкивающий потенциал

$$r^2 V(r) \rightarrow \infty \text{ при } r \rightarrow 0, \quad (17)$$

для которого начальные условия принимают вид

$$a_l(r_0) = 1 \text{ и } b_l(r_0) = j_l(r_0) / n_l(r_0) - k n_l^{-2}(r_0) / \sqrt{V(r_0)}, \quad (18)$$

где точка $r=r_0$ должна быть выбрана согласно условию

$$r_0 \sqrt{V(r_0)} \gg 2l+1. \quad (19)$$

Как было отмечено выше, функции $a_l(r)$ и $b_l(r)$ связаны с волновой функцией согласно формулам (12), (13). Данная связь позволяет сформулировать рассматриваемую задачу как задачу Коши непосредственно для волнового уравнения (2). Будем искать решения уравнения (2) в виде

$$u_l(r) = C_l H_l^1(r) + D_l H_l^2(r), \quad (20)$$

где $H_l^1(r)$ и $H_l^2(r)$ являются его двумя линейно независимыми решениями, удовлетворяющими начальным условиям

$$H_l^1(r_0) = 1, \quad dH_l^1(r_0)/dr = 0 \quad \text{и} \quad H_l^2(r_0) = 0, \quad dH_l^2(r_0)/dr = 1. \quad (21)$$

Постоянные C_l и D_l в (20) для двух рассмотренных выше случаев (15), (17) должны быть выбраны следующим образом:

$$C_l = j_l(r_0), \quad B_l = dj_l(r_0)/dr \quad \text{при} \quad V(r_0)r_0^2 \ll 1, \quad (22)$$

$$C_l = -kn_l^{-1}(r_0)\sqrt{V(r_0)}, \quad D_l = -kn_l^{-1}(r_0) \quad \text{при} \quad r_0\sqrt{V(r_0)} \gg 2l+1. \quad (23)$$

Отметим, что знание функций $H_l^1(r)$ и $H_l^2(r)$ для произвольного r определяет волновую функцию во всем пространстве (см. (20)). Так как $H_l^1(r)$ и $H_l^2(r)$ определяются согласно задаче Коши (21) для волнового уравнения (2), то, следовательно, задача нахождения волновой функции также сводится к задаче Коши для уравнения (2).

4. Волновая функция и спектр связанных состояний электрона в поле произвольного центрально-симметричного потенциала

В п.3 мы рассмотрели задачу определения волновой функции электрона, совершающего инфинитное движение в поле произвольного центрально-симметричного потенциала. Рассмотрим теперь случай финитного движения. Пусть потенциал задан на конечном интервале $0 < r < R$, вне которого ($r > R$) потенциал равен нулю. Если энергия электрона отрицательна, тогда он находится в связанном состоянии. Найдем волновые функции и энергетический спектр связанных состояний. Будем искать волновую функцию в следующем виде:

$$\phi(r) = \begin{cases} L_l u_l(r), & r < R, \\ M_l k_l(\chi r), & r > R, \end{cases} \quad (24)$$

где $\chi = \sqrt{|E|}$. Условие непрерывности волновой функции и ее производных в точке $r = R$ определяет спектр связанных состояний

$$\frac{u_l'(r)}{u_l(r)} = \frac{k_l'(\chi R)}{k_l(\chi R)} \quad \text{и} \quad M_l = \frac{u_l'(R)}{k_l(\chi R)} L_l. \quad (25)$$

Выбирая нормировочную константу L_l из условия нормировки, получим

$$L_l = \left[\int_0^\infty \left(u_l^2(r) + \frac{u_l'(R)}{k_l'(R)} k_l(\chi r) \right)^2 \right]^{-1/2}. \quad (26)$$

Предположим теперь, что внутри интервала $0 < r < R$ между точ-

ками r_1 , r_2 потенциал задан в виде произвольной функции $V(r)$, а в интервалах $0 < r < r_1$ и $r_2 < r < R$ принимает постоянное отрицательное значение $-V_0$ ($V_0 > 0$). В этом случае волновая функция связанного состояния принимает вид

$$\phi(r) = \begin{cases} A_1 j_l(kr), & r < r_1, \\ A_2 H_l^1(r) + B_2 H_l^2(r), & r_1 < r < r_2, \\ A_3 j_l(kr) + B_3 n_l(kr), & r_2 < r < R, \\ A_4 k_l(\chi r), & r > R, \end{cases} \quad (27)$$

где $k = \sqrt{V_0 - |E|}$. Функции $H_l^1(r)$, $H_l^2(r)$ являются решениями уравнения Шредингера с начальными условиями (21), заданными в точке $r_0 = r_1$. Условия непрерывности волновой функции и ее производной в точках r_1 , r_2 и R дают нам систему из шести уравнений для коэффициентов функции $\phi(r)$ $A_1, A_2, A_3, A_4, B_2, B_3$. Так как эта система однородна, то для ее разрешения необходимо потребовать равенства нулю ее детерминанта. Последнее условие приводит к следующему уравнению, определяющему энергетический спектр связанных состояний:

$$\frac{[u_l(r), j_l(kr)]|_{r=r_2}}{[u_l(r), n_l(kr)]|_{r=r_2}} = \frac{[k_l(\chi r), j_l(kr)]|_{r=R}}{[k_l(\chi r), n_l(kr)]|_{r=R}}, \quad (28)$$

где введены обозначения

$$u_l(r) = j_l(kr_1)H_l^1(r) + dj_l(kr_1)/dr H_l^2(r), \quad [A, B] = A dB/dx - B dA/dx. \quad (29)$$

Неизвестные коэффициенты A_2, A_3, A_4, B_2, B_3 связаны с коэффициентом A_1 согласно формулам

$$A_2 = j_l(kr_1)A_1, \quad B_2 = \frac{dj_l(kr_1)}{dr} A_1, \quad A_3 = \frac{A_1}{k} [u_l(r), n_l(kr)]|_{r=r_2},$$

$$B_3 = -\frac{A_1}{k} [u_l(r_2), j_l(kr_2)], \quad B_4 = \frac{[u_l(r_2), n_l(kr_2)]}{[k_l(\chi R), n_l(kR)]} A_1. \quad (30)$$

Неизвестная константа A_1 в (30) определяется из условия нормировки волновой функции $\phi_l(r)$:

$$A_1 = \left\{ \int_0^{r_1} j_l^2(kr) dr + \int_{r_1}^{r_2} u_l^2(r) dr + \frac{1}{k^2} \int_{r_2}^R (j_l(kr)[u_l(r_2), n_l(kr_2)] - n_l(kr)[u_l(r_2), j_l(kr_2)])^2 dr + \int_0^\infty \left(\frac{[u_l(r_2), n_l(kr_2)]}{[k_l(\chi r_2), n_l(kr_2)]} k_l(\chi r) \right)^2 dr \right\}^{-1/2}. \quad (31)$$

Отметим, что в (30), (31) предполагается, что k соответствует энергиям связанных состояний ($k \equiv k_n = \sqrt{E_n}$), которые определяются из уравнения (28).

5. Движение электрона в произвольном потенциальном поле с цилиндрической симметрией

Подход для рассмотрения движения электрона в поле с цилиндрической симметрией во многом аналогичен подходу для случая центрально-симметричного поля, который был изложен выше. Поэтому мы ограничимся только приведением окончательных результатов.

Как известно, если потенциал аксиальный, то в цилиндрической системе координат можно произвести разделение переменных в уравнении Шредингера:

$$\psi(\rho, \varphi, z) = \exp\{ik_z z\} \sum_{m=-\infty}^{\infty} u_m(\rho) \exp\{im\varphi\}, \quad (32)$$

где радиальная волновая функция удовлетворяет уравнению

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} + \left(k^2 - \frac{m^2}{\rho^2} - V(\rho) \right) \right] U_m(\rho) = 0. \quad (33)$$

В (32) k^2 есть энергия движения электрона в плоскости ρ, φ ($E - k_z^2 = k^2$, E — полная энергия электрона).

При $V(\rho) = 0$ двумя линейно независимыми решениями уравнения (33) являются функции Ганкеля $H_m^{(1)}(k\rho)$ и $H_m^{(2)}(k\rho)$, которые связаны с действительными функциями Бесселя-Неймана $J_m(k\rho)$ и $N_m(k\rho)$ следующим образом:

$$H_m^{(1)}(k\rho) = J_m(k\rho) + iN_m(k\rho), \quad H_m^{(2)}(k\rho) = J_m(k\rho) - iN_m(k\rho). \quad (34)$$

В случае, когда $V(\rho) \neq 0$, будем искать общее решение уравнения (33) в виде

$$U_m(\rho) = \frac{1}{2} \left[A_m(\rho) H_m^{(1)}(k\rho) + A_m^*(\rho) H_m^{(2)}(k\rho) \right] \quad (35)$$

и назовем $A_m(\rho)$ комплексной амплитудой рассеяния.

Используя (34), для (35) получим:

$$U_m(\rho) = a_m(\rho) J_m(k\rho) + b_m(\rho) N_m(k\rho), \quad (36)$$

где $a_m(\rho) = \text{Re } A_m(\rho)$ и $b_m(\rho) = \text{Im } A_m(\rho)$. Если потребовать, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{dU_m(\rho)}{d\rho} = a_m(\rho) \frac{dJ_m(\rho)}{d\rho} + b_m(\rho) \frac{dN_m(\rho)}{d\rho}, \quad (37)$$

то, аналогично случаю сферически-симметричного потенциала, $a_m(\rho)$ и $b_m(\rho)$ в произвольной точке ρ' будут равны действительной и мнимой части комплексной амплитуды рассеяния для обрезаемого потенциала

$$V(\rho, \rho') = V(\rho)\theta(\rho' - \rho).$$

Используя (33), (36), (37) для определения функций $a_m(\rho)$, $b_m(\rho)$, можно получить следующую систему линейных дифференциальных уравнений:

$$\frac{da_m(\rho)}{d\rho} = -\frac{\pi}{2} \rho V(\rho) N_m(k\rho) (a_m(\rho) J_m(k\rho) - b_m(\rho) N_m(k\rho)), \quad (38)$$

$$\frac{db_m(\rho)}{d\rho} = -\frac{\pi}{2} \rho V(\rho) J_m(k\rho) (a_m(\rho) J_m(k\rho) - b_m(\rho) N_m(k\rho)). \quad (39)$$

Для нахождения начальных условий для уравнений (38), (39) необходимо исследовать поведение решения вблизи точки $\rho=0$. Из (36), (37) выразим функции $a_m(\rho)$, $b_m(\rho)$ через $U_m(\rho)$, $dU_m(\rho)/d\rho$ следующим образом:

$$a_m(\rho) = [U_m(\rho), N_m(k\rho)] \text{ и } b_m(\rho) = [U_m(\rho), J_m(k\rho)]. \quad (40)$$

Следуя работе [20], здесь мы приводим начальные условия для двух случаев.

Потенциал является несингулярным или слабо сингулярным:

$$\rho^p V(\rho) \leq \theta(1/\ln^2 \rho), \quad \rho \rightarrow 0 \quad (41)$$

при $p > 0$ для любого m или же при $0 < p < 2$ при $m > 0$. Интегрирование (38), (39) должно производиться начиная с точки ρ_0 с условиями $a_m(\rho_0) = 1$ и $b_m(\rho_0) = 0$, где ρ_0 определяется согласно неравенству $V(\rho_0)\rho_0^2 \ll 1/(N_m(k\rho_0)J_m(k\rho_0))^2$. Используя (40), для интегрирования уравнения Шредингера получим следующие начальные условия:

$$U_m(\rho_0) = J_m(k\rho_0) \text{ и } dU_m(\rho_0)/d\rho = dJ_m(k\rho_0)/d\rho. \quad (42)$$

Потенциал является сильно сингулярным, когда он имеет вид (41) при $0 < p < 2$ для $m=0$ и в случае

$$V(\rho)\rho^2 \rightarrow 0, \quad \rho \rightarrow 0, \quad (43)$$

для любого m . В этом случае начальные условия для уравнений (38), (39) имеют вид $a_m(\rho_0) = 1$, $b_m(\rho_0) = J_m(k\rho_0)/N_m(k\rho_0) - 2/(\pi\rho_0 V(\rho_0))^{-1/2} N_m^2(k\rho_0)$, где ρ_0 определяется согласно неравенству $V(\rho_0)\rho_0^2 \gg \gg 1/(N_m(k\rho_0)J_m(k\rho_0))^2$. Тогда начальные условия для интегрирования уравнения Шредингера примут вид

$$U_m(\rho_0) = \frac{2V(\rho_0)^{-1/2}}{\pi\rho_0 N_m(\rho_0)} \text{ и } \frac{dU_m(\rho_0)}{d\rho} = \frac{2}{\pi\rho_0 N_m(k\rho_0)}. \quad (44)$$

Будем искать решение уравнения Шредингера (33) в виде

$$U_m(\rho) = C_m H_m^1(\rho) + D_m H_m^2(\rho). \quad (45)$$

Тогда в (44) $H_m^1(\rho)$ и $H_m^2(\rho)$ могут быть рассмотрены как линейно независимые решения уравнения Шредингера, удовлетворяющие начальным условиям

$$H_m^1(\rho_0) = 1, \quad dH_m^1(\rho_0)/d\rho = 0, \quad H_m^2(\rho_0) = 0, \quad dH_m^2(\rho_0)/d\rho = 1 \quad (46)$$

и

$$C_m = U_m(\rho_0), \quad D_m = dU_m(\rho_0)/d\rho. \quad (47)$$

Здесь $U_m(\rho_0)$, $dU_m(\rho_0)/d\rho$ определяются согласно (42) и (44).

Рассмотрим теперь задачу определения энергетического спектра и волновых функций электрона, когда потенциал задан внутри интервала $0 \leq \rho \leq \rho'$ и вне которого он равен нулю. Если энергия электрона отрицательна, то волновая функция связанного состояния имеет вид

$$\phi_m(\rho) = \begin{cases} L_m U_m(\rho), & \rho \leq \rho', \\ M_m K_m(\chi\rho), & \rho \geq \rho', \end{cases} \quad (48)$$

где $\chi = \sqrt{|E|}$. Условие непрерывности волновой функции и ее производной в точке $\rho = \rho'$ определяет энергетический спектр электрона и связывает константы L_m и M_m :

$$\frac{U'_m(\rho')}{U_m(\rho')} = \frac{K'_m(\chi\rho')}{K_m(\chi\rho')} \quad \text{и} \quad M_m = \frac{U'_m(\rho')}{U_m(\rho')} L_m. \quad (49)$$

Отметим также, что можно рассмотреть задачу определения электронного спектра и волновых функций для неоднородной квантовой нити с потенциалом, аналогичным потенциалу неоднородной квантовой точки (см. (4)). Как показывает рассмотрение, получаемые при этом решения, константы, входящие в волновую функцию, а также уравнение, определяющее энергетический спектр, имеют форму, аналогичную формулам (24)-(27), соответственно, где $j_l(\chi r)$, $n_l(\chi r)$, $k_l(\chi r)$ заменены на $J_l(\chi r)$, $N_l(\chi r)$, $K_l(\chi r)$.

В заключение отметим, что полученные результаты будут применены для исследования энергетического спектра и волновых функций электрона в низкоразмерных системах с заданным видом потенциала, реализованным экспериментально.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Квантовая механика. М., Наука, 1974.
2. И.И.Гуревич, Л.А.Тарасов. Физика нейтронов низких энергий. М., Наука, 1965.
3. Дж.Тейлор. Теория рассеяния. М., Мир, 1974.
4. М.Херман. Полупроводниковые сверхрешетки. М., Мир, 1989.
5. L.Esaki, R.Tsu. IBM J. Res. Dev., **14**, 61, (1970).
6. Ю.А.Романов. ФТП, **4**, 1434 (1971).
7. H.C.Liu. J.Appl. Phys., **73**, 3062 (1993); B.F.Levine, J.Appl. Phys., **74**, R1 (1993).

8. H.Akayama, H.Sugavara, Y.Kodoya. A.Lorke, S.Trujino, H.Sakaki. Appl. Phys. Lett., 65, 424 (1994).
9. N.Mori, T.Ando. Phys. Rev., B40, 6175 (1989).
10. J.M.Rosison. Phys. Rev., B48, 4643 (1994).
11. M.M.Agasyan and A.A.Kirakosyan. Physica E, 8, 281 (2000).
12. R.R.L.De Carvalho, J.R.Filho, G.A.Farias, V.N.Freire. Super. and Microstructures, 25, 221 (1999).
13. Н.В.Ткач, И.В.Пронишин, А.М.Маханец. ФТТ, 40, 577 (1998).
14. D.Schooss, A.Mews, A.Eychmuller, H. Weller. Phys. Rev., B49, 17072 (1994).
15. J.Kim, Lin-Wang Wang, A.Zuger. Phys. Rev., B56, 15541 (1997).
16. G.Bastard. Wave mechanics applied to the semiconductor heterostructures. Paris, Les Ulis, 1989.
17. D.M.Sedrakian and A.Zh.Khachatryan. Phys. Lett., A265, 294 (2000).
18. Д.М.Седракиян, А.Ж.Хачатрян. Изв. НАН Армении, Физика 36, 62 (2001); 36, 241 (2001).
19. G.Calogero. Variable phase approach in potential scattering. N.Y. & London, Acad. Press, 1967.
20. В.В.Бабигов. УФН, 92, 3 (1967).
21. В.А.Амбарцумян. ДАН СССР, 38, 8 (1943).

ՑՐԱՆ ԿՈՄՊԼԵՔՍ ԱՄՊԼԻՏՈՒԴԻ ՄԵԹՈՂԸ
ԲՎԱՆՏԱՅԻՆ ՄԵԽԱՆԻԿԱՅԻՆՄ

Գ.Մ.ՍԵԴՐԱԿՅԱՆ, Ա.Ճ.ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ

Դիտարկված է էլեկտրոնի շարժման նկարագրման խնդիրը կամայական կենտրոնահամաչափ պոտենցիալային դաշտում: Ցույց է տրված, որ ալիքային ֆունկցիայի պարզիալ ալիքների որոշման խնդիրը կարելի է բերել Կոշիի խնդրի ռադիալ Շրեդինգերի հավասարման համար: Էլեկտրոնի կապված վիճակների համար ստացված է նրանց էներգիական սպեկտրը որոշող հավասարում: Ցույց է տրված, որ եթե կապված վիճակների սպեկտրը հայտնի է, ապա կապված վիճակների ալիքային ֆունկցիաների որոշման խնդիրը նորից բերվում է Շրեդինգերի հավասարման լուծմանը տրված սկզբնական պայմանների համար: Կատարված է նաև առաջարկված մոտեցման ընդհանրացումը կամայական զրամահամաչափ պոտենցիալային դաշտում էլեկտրոնի շարժման համար:

METHOD OF COMPLEX SCATTERING AMPLITUDE
IN QUANTUM MECHANICS

D.M. SEDRAKIAN, A.ZH. KHACHATRIAN

The problem of description of the electron motion in the field of an arbitrary central-symmetric potential is considered. It is shown that the problem of finding the partial waves of the wave function can be reduced to the Cauchy problem for the radial Schroedinger wave equation. The equation determining the energy spectrum for bound electron states is found. It is also shown that, if the spectrum of the bound states is known, the problem of determination of bound states is also reduced to the problem of solution of the Schroedinger equation with given initial conditions. Generalization of the approach for the electron motion in an arbitrary cylindrical-symmetric potential field is also performed.