Известия НАН Армении, Физика, т.37, №4, с.228-232 (2002)

УДК 539.1

МОДЕЛЬ ДЖЕЙНСА–КАММИНГСА ДЛЯ АТОМА, ДВИЖУЩЕГОСЯ В ПОЛЕ ВСТРЕЧНЫХ ВОЛН

Г.А. МУРАДЯН

Ереванский государственный университет

(Поступила в редакцию 16 января 2002 г.)

Определены собственные состояния модели Джейнса–Каммингса (атом в квантованном электромагнитном поле) на базе гамильтониана, включающего кинетическую энергию центра масс атома. Рассмотрены случаи стоячей и бегущих встречных волн и сделано их количественное сопоставление.

Известно, что представления стоячей и двух встречных волн для классического поля эквивалентны. Однако в квантовой теории эти представления и их гамильтонианы различны [1]. Упомянутое несоответствие физических аспектов обсуждено в работе [2] на примере вычисления квантовых амплитуд когерентной дифракции атомных волн в поле квантового резонатора (резонансная дифракция Капицы–Дирака [3] в квантованном случае), в условиях, когда время взаимодействия намного меньше времени прохождения атомом расстояния, равного длине волны. Было показано, что различия между амплитудами рассеяния могут быть значительными, и представлена физическая причина этих различий. Ею является поведение закона сохранения импульса в системе “атом + поле”.

В настоящей работе рассматриваются стационарные состояния вышеуказанных двух систем: атом+квантованное поле излучения стоячей волны (СВ) и/или бегущих встречных волн (БВВ). Использована известная теоретическая модель Джейнса–Каммингса [4]. Спонтанная эмиссия и другие некогерентные процессы в модели не учитываются.

Сначала рассмотрим случай БВВ. Гамильтониан в дипольном и вращающейся волны приближениях дается формулой [2]

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2M} + \frac{1}{2}\left(1+\sigma_3\right)\hbar\omega_0 + \hbar\omega\left(a_1^+ a_1 + a_2^+ a_2\right) +$$
$$+ \frac{1}{2^{3/2}}\hbar\Omega_0\left[\sigma_+\left(a_1 \exp(ikz) + a_2 \exp(-ikz)\right) + \sigma_-\left(a_1^+ \exp(ikz) + a_2^+ \exp(-ikz)\right)\right], \qquad (1)$$

где $\hat{p}$ – оператор импульса атома, σ_3, σ_+, и σ_- – обыкновенные операторы Паули, a_i^+ и a_i (i=1,2) – соответственно операторы рождения и уничтожения для двух бегущих волн, $k = \omega / c$, , Ω_0 – частота Раби в вакууме, ω – частота поля, а ω_0 – частота внутренних переходов атома. Рассматриваемая система атом в поле БВВ имеет четыре степени свободы. Три оператора, которые вместе с гамильтонианом дают полную систему взаимно коммутативных операторов, следующие: $\hat{N} = (1/2)(1+\sigma_3) + a_1^+ a_1 + a_2^+ a_2$, $\hat{P} = \hat{p} + \hbar k(a_1^+ a_1 - a_2^+ a_2)$, $\hat{T} = \sigma_3 \exp(i\pi\hat{p} / \hbar k)$. Следовательно, $\hat{H}$, $\hat{N}$, $\hat{P}$ и $\hat{T}$ имеют совместные собственные значения и общую систему собственных функций. Ниже будут рассмотрены только эти состояния, которые являются основными.

Волновую функцию системы можно представить в виде

$$\Psi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sum_{r=0}^{N} a_r(t) |r\rangle_1 \, |N-r)_2 \exp\left(\frac{i}{\hbar}(P-(N-2r)\hbar k)z\right) +$$
$$+ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sum_{r=0}^{N-1} b_r(t) |r\rangle_1 \, |N-1-r)_2 \exp\left(\frac{i}{\hbar}(P-(N-1-2r)\hbar k)z\right). \quad (2)$$

Коэффициенты в случае стационарных состояний имеют вид $a_r(t) = a_r \exp[-iEt / \hbar]$, $b_r(t) = b_r \exp[-iEt / \hbar]$, где E – полная энергия системы. После стандартных преобразований из уравнения Шредингера получается следующая система тридиагональных рекуррентных уравнений:

$$\left[E - N\hbar\omega - (P - 2r\hbar k)^2 / 2M\right] a_r = (\hbar\Omega_0 / 2^{3/2})[\sqrt{N/2+r}\, b_{r-1} + \sqrt{N/2-r}\, b_r], \quad (3a)$$

$$[E + \hbar\varepsilon - N\hbar\omega - (P-(2r+1)\hbar k)^2 / 2M] b_r = (\hbar\Omega_0 / 2^{3/2}) \times$$
$$\times [\sqrt{N/2+r+1}\, a_{r+1} + \sqrt{N/2-r}\, a_r], \quad (3b)$$

где $r = -N/2,\ -N/2+1, ..., N/2$, а $\varepsilon = \omega - \omega_0$ – расстройка частоты поля от атомного перехода.

До рассмотрения решений этих уравнений обратимся к случаю СВ. Гамильтониан в этом случае имеет вид [2]

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2M} + \frac{1}{2}(1+\sigma_3)\hbar\omega_0 + \hbar\omega a^+ a + \frac{1}{4}\hbar\Omega_0(\sigma_+ a + \sigma_- a^+)[\exp(ikz) + \exp(-ikz)]. \quad (4)$$

Действуя, как и в случае с (2), (3a) и (3b), приходим к уравнениям

$$\left[E - N\hbar\omega - (P-2r\hbar k)^2 / 2M\right] a_r = \left(\hbar\Omega_0 / 4\right)\sqrt{N}\left[b_{r-1} + b_r\right], \quad (5a)$$

$$\left[E + \hbar\varepsilon - N\hbar\omega - (P-(2r+1)\hbar k)^2 / 2M\right] b_r = \left(\hbar\Omega_0 / 4\right)\sqrt{N}\left[a_{r+1} + a_r\right]. \quad (5б)$$

Кроме очевидных сходств, системы (3a), (3b) и (5a), (5b) имеют и важные различия. В то время как первое множество уравнений конечно, второе бесконечно. Следующее различие состоит в коэффициентах правых частей: они зависят от r для первого множества, но постоянны для второго. И последнее различие, которое уже концептуальное и заслуживает особого внимания: полный импульс P в случае БВВ, в отличие от своего аналога P в случае СВ, не может трактоваться как квазиимпульс. Это утверждение следует из того факта, что замена $P \to P + s2\hbar k$, с переобозначением $r \to r - s$ в (3a), (3b), где s – целое число, сохраняет коэффициенты левых частей неизменными, в то время как коэффициенты правых частей изменяются. Это приводит к новым значениям энергий и вероятностных амплитуд.

Учитывая, что физической причиной этого различия является закон сохранения импульса, мы приходим к выводу, что принятие концепции квазиимпульса в пространственно-периодических системах обусловлено неприменимостью закона сохранения импульса. В закрытых системах, где сохраняется полный импульс, нет концепции квазиимпульса.

На рис.1a и 1b изображен энергетический спектр как функция от импульса соответственно для случаев БВВ и СВ. Четко видны упомянутые различия для энергетических спектров. Во-первых, количество энергетических ветвей конечно для БВВ ($2N+1=13$ в выбранном случае), в то время как оно бесконечно для СВ (дано только несколько нижних ветвей). Во-вторых, спектр БВВ не повторяется по зонам с шириной $2\hbar k$, что как раз и означает неприменимость концепции квазиимпульса в этом случае.

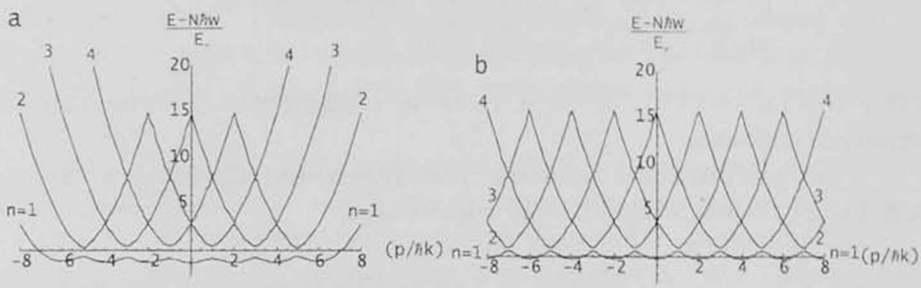

Рис.1.

Распределения вероятностных амплитуд даны на рис.2a и 2b для случая $N=6$. Можно видеть очевидные отличия в случаях с БВВ и СВ. Графики также показывают разницу между импульсными распределениями для связанных (нижние уровни) и свободных (верхние уровни) состояний.

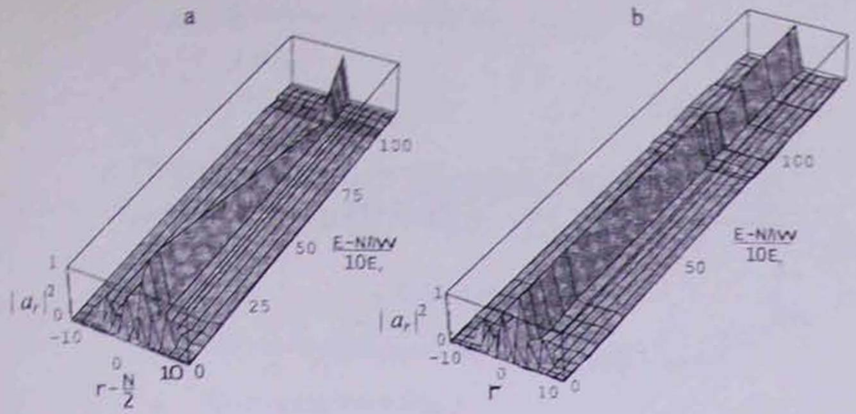

Рис.2.

Доплерон-резонансное рассеяние

Доплеронный резонанс имеет место для атома, который движется в поле СВ [5], и применяется в атомной оптике и лазерном охлаждении. В отличие от резонанса Брэгга, в случае доплерон-резонанса атом одновременно с рассеянием меняет населенность энергетического уровня. Здесь будет исследован предел малых интенсивностей, и внимание будет уделено роли многофотонной энергии отдачи.

Условием доплерон-резонанса (в пределе малых интенсивностей) является уравнение [6]

$$\omega-\omega_0=(2n_1-2r-1)kp/M+(2n_1-2r-1)^2\hbar k^2/2M). \qquad (6)$$

С помощью этого условия исследуем поведение импульса конечного состояния p_f в зависимости от начального импульса p. Для этого рассмотрим условие (6) как зависимость r от P, а потом поместим его в выражение конечного импульса возбужденного атома $p_f=P+(N-2r-1)=p+(2n_1-1-2r)$. Простые подстановки дают

$$p_f=\pm\sqrt{p^2+2M\hbar(\omega-\omega_0)} \qquad (7)$$

при условии, что начальный импульс удовлетворяет условию доплерон-резонанса (6). Для каждого фиксированного значения частоты ω, удовлетворяющего условию (6), величина начального импульса P принимает дискретные значения, соответствующие целым значениям $(2n_1-1-2r)$.

Графики уравнения (7) даны на рис.3. Для сравнения даны также графики без учета члена энергии отдачи (последний член в (6)).

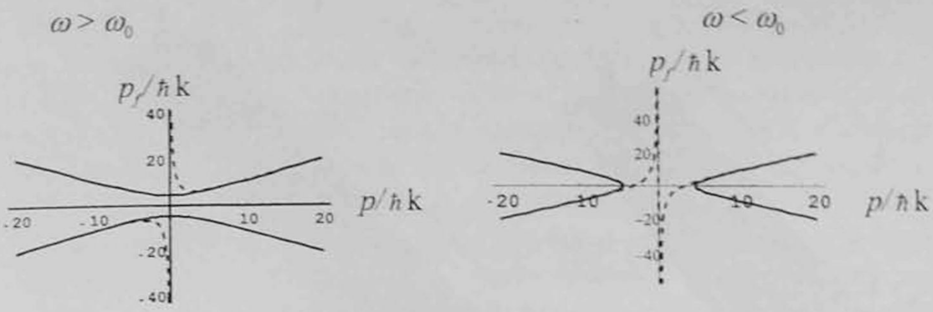

Рис.3.

ЛИТЕРАТУРА

1. **C.Cohen-Tannoudji, J.Dupont-Roc, G.Grynberg**. Photons and Atoms. Introduction in Quantum Electrodynamics. Wiley, New York, 1989.
2. **B.W.Shore, P.Meystre, S.Stenholm**. J. Opt. Soc. Am., **B 8**, 903 (1991).
3. **А.Ж.Мурадян**. Изв. АН Арм. ССР, Физика, **10**, 361 (1975); **R.J.Cook** and **A.F.Bernhardt**. Phys. Rev. A, **18**, 2533 (1978); **P.Meystre, E.Schumacher**, and **S.Stenholm**. Opt. Comm., **73**, 443 (1989); **J.H.Muller, D.H.Doery, E.Vredenbregt, K.Holmerson, S.L. Rolston, W.D.Phillips**. Phys. Rev. Lett., **83**, 284 (1999).
4. **E.T.Jaynes** and **F.W.Cummings**. Proc. IEEE, **51**, 89 (1963).
5. **A.F.Bernhardt** and **B.W.Shore**. Phys. Rev. A, **23**, 1290 (1981).
6. **P.R.Berman** and **J.Ziegler**. Phys. Rev. A, **15**, 2042 (1977).

ՋԵՅՆՍ–ՔԱՄԻՆԳՍԻ ՄՈԴԵԼԸ ՀԱՆԴԻՊԱԿԱՑ ԱԼԻՔՆԵՐԻ ԴԱՇՏՈՒՄ ԱՏՈՄԻ ՀԱՄԸՆԹԱՑ ՇԱՐԺՄԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ

Գ.Ա. ՄՈՒՐԱԴՅԱՆ

Ատոմի քվանտային համընթաց շարժման հաշվառմամբ, քննարկված են Ջեյնս–Քամմինգսի մոդելի սեփական վիճակները։ Հաշված են էներգիական սպեկտրը և ալիքային ֆունկցիաները կանգուն ալիքի և հանդիպակաց ալիքների քվանտացված դաշտերում։

JAYNES–CUMMINGS MODEL FOR AN ATOM MOVING IN THE FIELD OF COUNTERPROPAGATING WAVES

G.A. MURADYAN

The eigenstate problem of the Jaynes–Cummings model on the basis of complete Hamiltonian, including the center-of-mass kinetic energy operator, is considered. The energy spectrum and wave functions in the cases of standing wave and counterpropagating waves are calculated.