

УДК 530.145

РЕШЕТОЧНАЯ МОДЕЛЬ УЙМИНА-ЛАЯ-САЗЕРЛЭНДА СПИНА 3/2 В ТЕРМИНАХ ОПЕРАТОРОВ РОЖДЕНИЯ И УНИЧТОЖЕНИЯ ФЕРМИОНОВ

М.Б. МИРУМЯН

Ереванский физический институт

(Поступила в редакцию 24 декабря 2001 г.)

Исследована решеточная спиновая модель Уймина-Лая-Сазерлэнда спина 3/2. Построено представление алгебры $su(2)$ спина 3/2 в линейном пространстве операторов рождения и уничтожения трех фермионов. Найден выражение для гамильтониана и энергетический спектр, а также соответствующие уравнения Бете.

1. Введение

Точнорешаемые модели статистической физики и теории поля, относящиеся к малому числу измерений ($d = 0, 1, 2$), давно находятся в сфере пристального внимания физиков-теоретиков. Интерес сильно возрос в последнее время, в связи с многочисленными приложениями в физике твердого тела.

Развитие современных наноструктурных технологий позволяет рассматривать экспериментально проблемы в ноль- (квантовые точки), одно- (квантовые нити) и двух- (эффект Холла, высокотемпературная сверхпроводимость) мерных моделях.

Известная одномерная решеточная модель Гейзенберга спина 1/2 с гамильтонианом

$$H = J \sum_{i=1}^N \sigma_i \sigma_{i+1} \quad (1)$$

была впервые решена Бете в 1931г. [1] с помощью подстановки, носящей сейчас его имя (анзац Бете). В течение последних 25 лет этот метод развился в мощный формализм под названием квантовый метод обратной задачи рассеяния (КМОЗР) [2,3] или алгебраический анзац Бете (ААБ). Метод позволяет найти полное множество собственных значений и собственных векторов интегрируемой системы. Интегрируемость модели обеспечивается требованием выполнения уравнений Янга-Бакстера, которые эквивалентны существованию бесконечного числа законов

сохранения. Затем с помощью алгебраического анзаца Бете могут быть найдены спектр энергетических состояний модели [4,5] и уравнения Бете. Так как фермионное пространство Фока конечномерно, применение ААБ в матричной формулировке намного упрощается. Надо отметить, что техника ААБ в основном была развита для спиновой решеточной модели ХХЗ, а его применение к моделям, изначально сформулированным при помощи антикоммутирующих операторов, оказалось сложнее. Например, для модели Хаббарда, которая изначально была решена методом координатного анзаца Бете, применение ААБ оказалось возможным недавно [6], после существенных работ Шастри [7-9], в которых было использовано преобразование Йордана-Вигнера для перехода от фермионных операторов к спиновым, с целью применения МОЗР в матричной формулировке. В последнее время повысился интерес к спиновым решеточным моделям, сформулированным посредством ферми-операторов, с использованием преобразования Йордана-Вигнера [10], а также некоторых новых методов, развитых в работах [5-7].

Оказалось, что явное построение интегрируемых моделей и применение КМОЗР в терминах ферми-операторов становится сравнительно легкой задачей. Так как пространство Фока фермиона конечномерно, то изучение полного набора собственных векторов и собственных значений трансфер-матрицы упрощается. Известно, что тривиальное обобщение модели Гейзенберга на высшие спины неинтегрируемо [11]. Первая интегрируемая модель спина s была сформулирована Г.Уймином [8], Дж.К.Лаем [9] и Б.Сазерлендом [12]. Ими была исследована модель с гамильтонианом

$$H = J \sum_{i=1}^N (Id_{i,j+1} + P_{i,j+1}), \quad (2)$$

где $P_{i,j+1}$ – оператор перестановки состояний в узлах i и $i+1$, а $Id_{i,j+1}$ – единичный оператор. Они показали ее интегрируемость и решили координатным анзацем Бете.

В данной работе исследована решеточная модель Уймина-Лая-Сазерленда спина $3/2$. Построено представление алгебры $su(2)$ спина $3/2$ в тензорном произведении пространств Фока трех фермионов спина $1/2$. Методом алгебраического анзаца Бете найдены спектр трансфер-матрицы и гамильтониан исследуемой модели.

2. Квантовый метод обратной задачи рассеяния в градуированных пространствах

Здесь мы напомним основные формулы квантового метода обратной задачи рассеяния. Основным объектом формализма КМОЗР является R -матрица [1,3,4,5], с помощью которой матрица монодромии и трансфер-матрица соответственно определяются как

$$T(u) = \prod_{j=1}^N R_{ij}(u) = \prod_{j=1}^N L_j(u) \quad (3)$$

и

$$\tau(u) = \text{Tr}_\sigma \prod_{j=1}^N R_{aj}(u) = \text{Tr} \prod_{j=1}^N L_j(u), \quad (4)$$

где u – спектральный параметр, а $L_j(u)$ – оператор Лакса (определенный далее согласно (13)) (след берется во вспомогательном пространстве). По определению

$$R_{aj}(u, v): V_\sigma(u) \otimes V_j(v) \rightarrow V_j(v) \otimes V_\sigma(u), \quad (5)$$

где пространства $V_\sigma(u)$ и $V_j(u)$ – соответственно вспомогательное и квантовое, которые являются неприводимыми представлениями группы симметрии рассматриваемой модели. Уравнения Янга-Бакстера обеспечивают коммутативность трансфер-матриц при разных значениях спектрального параметра, т. е.

$$[T(u), T(v)] = 0. \quad (6)$$

Соотношение (3) порождает бесконечный ряд коммутирующих и сохраняющихся величин, т.е. интегралов движения.

Гамильтониан определяется из следующего соотношения:

$$H = - \left. \frac{\partial \ln T(u)}{\partial u} \right|_{u=0}. \quad (7)$$

Следуя [6,7], обозначим базисы в $V_\sigma(u)$ и $V_j(u)$ соответственно через $|a\rangle$ и $|j\rangle$, тогда R -матрицу можно представить в виде

$$R_{aj}|j\rangle \otimes |a\rangle = R_{a'j'}^{aj}|a'\rangle \otimes |j'\rangle, \quad (8)$$

где по повторяющимся индексам a' и j' подразумевается суммирование (но не по индексам a и j).

Так как в общем случае в формализме могут присутствовать антикоммутирующие операторы, то ясно, что в квантовом и вспомогательном пространствах будут присутствовать и грассмановые переменные, и возникает необходимость правильно учитывать знаки, возникающие при их упорядочении.

Операторы Хаббарда определяются соотношениями

$$\begin{aligned} X_{a'}^a &= |a'\rangle \langle a|, \\ X_{j'}^j &= |j'\rangle \langle j| \end{aligned} \quad (9)$$

в пространствах V_σ и V_j соответственно. Легко видеть, что для R -матрицы имеем:

$$R_{aj} = R_{aj} |j\rangle \langle j| = (-1)^{p(a)p(j')} R_{aj'}^{aj} X_{a'}^a X_{j'}^j, \quad (10)$$

где $p(a)$ и $p(j)$ обозначают четности соответствующих состояний в $V_a(u)$ и $V_j(u)$, соответственно.

Из определения (9) легко видеть, что операторы Хаббарда имеют проективное свойство, т.е.

$$X_a^b X_a^{b'} = \delta_a^{b'} X_a^b.$$

Уравнения Янга-Бакстера в обычной форме имеют следующий вид:

$$R_{ab}(u, v) R_{aj}(u, w) R_{bj}(v, w) = R_{bj}(v, w) R_{aj}(u, w) R_{ab}(u, v). \quad (12)$$

Оператор Лакса определяется как [8]

$$L_a^a = \langle a' | R(u, v) | a \rangle = (-1)^{p(a)p(j)} R_{a'j}^{aj}(u, v) X_j^{j'}. \quad (13)$$

Тогда можно показать, что уравнение Янга-Бакстера (12) принимает следующий вид [8]:

$$\tilde{R}_{ab}^{a'b'}(L \otimes_s L)_{ab}^{a'b'} = (L \otimes_s L)_{ab}^{a'b'} \tilde{R}_{ab}^{a'b'}, \quad (14)$$

или

$$\tilde{R}(u-v)(T(u) \otimes_s T(v)) = (T(v) \otimes_s T(u)) \tilde{R}(u-v), \quad (15)$$

где

$$\tilde{R}_{cd}^{ab} = R_{cd}^{ba},$$

$$(A \otimes_s B)_{bd}^{ac} = (-1)^{(p(a)+p(b))p(d)} A_b^a B_d^c$$

градуированное тензорное произведение [9].

3. Представление алгебры $su(2)$ спина $3/2$ в пространстве операторов рождения и уничтожения фермионов, решетка Уймина-Лая-Сазерлэнда спина $3/2$

Интегрируемая модель спина s впервые была построена Г. Уймином, Дж. Лаем и Б. Сазерлэндом [8,9,12], а до этого было доказано, что тривиальное обобщение модели Гейзенберга неинтегрируемо [11]. Для исследования модели Уймина-Лая-Сазерлэнда спина $3/2$ на языке фермионных операторов, нам необходимо построить представление алгебры $su(2)$ в пространстве операторов рождения и уничтожения фермионов трех сортов. Почему необходимо работать именно в тензорном произведении пространств Фока трех сортов фермионов, будет ясно из дальнейшего изложения.

Алгебра $su(2)$ определяется следующими коммутационными соотношениями:

$$\begin{aligned} [S^+, S^-] &= 2S; \\ [S, S^\pm] &= \pm 2S^\pm. \end{aligned} \quad (17)$$

Легко видеть, что операторы

$$\begin{aligned} S^+ &= c^+; & S^- &= c^-; & n &= c^+ c^-, \\ S &= \frac{1}{2}(2n-1) \end{aligned} \quad (18)$$

(где c^+, c^- — операторы рождения и уничтожения фермиона, соответственно) реализуют представление алгебры $su(2)$ спина $1/2$. Как показано в [12,13], представление алгебры $su(2)$ спина 1 реализуется операторами рождения и уничтожения двух сортов фермионов следующим образом:

$$\begin{aligned} S^+ &= (1-n_1)c_2 + (1-n_2)c_1^+, \\ S^- &= (1-n_2)c_1 + (1-n_1)c_2^+, \\ S &= n_1 - n_2, \end{aligned} \quad (19)$$

где c_i^+ и c_i ($i=1,2$) — операторы рождения и уничтожения соответствующих фермионов:

$$\begin{aligned} \{c_j^+, c_i\} &= \delta_{ij}; \\ n_j &= c_j^+ c_j. \end{aligned} \quad (20)$$

Так как тензорное произведение пространств Фока l фермионов 2^l -мерно, то для того, чтобы построить представление алгебры $su(2)$ размерности $2s+1$, количество требуемых фермионов должно удовлетворять соотношению

$$2s+1 \leq 2^l. \quad (21)$$

Мы намерены построить представление алгебры $su(2)$ размерности 4 (т.е. спина $3/2$). Согласно (18) минимальное число необходимых фермионов для построения равно трем.

Представление алгебры $su(2)$ спина $3/2$ операторами рождения и уничтожения фермионов четырехмерно и имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} S^+ &= \sqrt{3}(1-n_3)c_1^+c_2 + 2(1-n_1)c_2^+c_3 + \sqrt{3}(1-n_1)(1-n_2)c_3^+, \\ S^- &= \sqrt{3}(1-n_3)c_2^+c_1 + 2(1-n_1)c_3^+c_2 + \sqrt{3}(1-n_1)(1-n_2)c_3, \\ S &= 3n_1 + n_3 - 3/2 - 5/2n_1n_3 - 7/2n_1n_3 - 3/2n_2n_3 + 3n_1n_2n_3. \end{aligned} \quad (22)$$

Легко проверить, что действуя операторами (22) на векторы

$$\begin{aligned} |3/2\rangle &= |1\rangle|0\rangle|0\rangle, \\ |1/2\rangle &= |0\rangle|1\rangle|0\rangle, \\ |-1/2\rangle &= |0\rangle|0\rangle|1\rangle, \\ |-3/2\rangle &= |0\rangle|0\rangle|0\rangle, \end{aligned} \quad (23)$$

получаем:

$$\begin{aligned}
S^+|3/2\rangle &= 0; & S^-|3/2\rangle &= \sqrt{3}|1/2\rangle; & S|3/2\rangle &= 3/2|3/2\rangle, \\
S^+|1/2\rangle &= \sqrt{3}|3/2\rangle; & S^-|1/2\rangle &= 2|-1/2\rangle; & S|1/2\rangle &= 1/2|1/2\rangle, \\
S^+|-1/2\rangle &= 2|1/2\rangle; & S^-|-1/2\rangle &= \sqrt{3}|-3/2\rangle; & S|-1/2\rangle &= -1/2|-1/2\rangle, \\
S^+|-3/2\rangle &= \sqrt{3}|-1/2\rangle; & S^-|-3/2\rangle &= 0; & S|-3/2\rangle &= -3/2|-3/2\rangle.
\end{aligned} \tag{24}$$

Индексы градуировки векторов следующие:

$$P(\sigma) = 1, \quad (\sigma = 3/2; 1/2; -1/2), \quad P(-3/2) = 0. \tag{25}$$

Очевидно, что оператор Казимира К алгебры $\mathfrak{su}(2)$, который равен

$$K = S^+S^- + S^-S^+ + S^2, \tag{26}$$

проецирует 8-мерное пространство состояний Фока трех фермионов на 4-мерное подпространство с базисом (23).

Действие операторов (22) на отбрасываемые векторы

$$\begin{aligned}
|x_1\rangle &= |1\rangle|1\rangle|1\rangle, \\
|x_2\rangle &= |0\rangle|1\rangle|1\rangle, \\
|x_3\rangle &= |1\rangle|1\rangle|0\rangle, \\
|x_4\rangle &= |1\rangle|0\rangle|1\rangle
\end{aligned} \tag{27}$$

равно нулю. Другими словами, $\ker K = \{a^i x_i : \forall a^i \in \mathfrak{o}^1, i = 1, 2, 3, 4\}$. Таким образом, получаем, что

$$F \otimes F \otimes F = V \oplus \ker K, \tag{28}$$

где $V \subset F \otimes F \otimes F$ с базисом (23), причем

$$\ker K = \ker S = \ker S^\pm. \tag{29}$$

Для спина 3/2 оператор Хаббарда имеет вид

$$\begin{aligned}
X_{im}^k &= \begin{pmatrix} |-3/2\rangle\langle -3/2| & |-1/2\rangle\langle -3/2| & |1/2\rangle\langle -3/2| & |3/2\rangle\langle -3/2| \\ |-3/2\rangle\langle -1/2| & |-1/2\rangle\langle -1/2| & |1/2\rangle\langle -1/2| & |3/2\rangle\langle -1/2| \\ |-3/2\rangle\langle 1/2| & |-1/2\rangle\langle -1/2| & |1/2\rangle\langle 3/2| & |3/2\rangle\langle 3/2| \\ |-3/2\rangle\langle 3/2| & |-1/2\rangle\langle 3/2| & |1/2\rangle\langle 3/2| & |3/2\rangle\langle 3/2| \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} (1-n_1)(1-n_2)(1-n_3)(1-n_1)(1-n_2)c_3^+ & (1-n_1)(1-n_3)c_2^+ & (1-n_2)(1-n_3)c_1^+ \\ (1-n_1)(1-n_2)c_3 & (1-n_1)(1-n_2)n_3 & (1-n_1)c_2^+c_3 & (1-n_2)c_1^+c_3 \\ (1-n_1)(1-n_3)c_2 & (1-n_1)c_3^+c_2 & (1-n_1)n_2(1-n_3) & (1-n_3)c_1^+c_2 \\ (1-n_2)(1-n_3)c_1 & (1-n_2)c_3^+c_2 & (1-n_3)c_2^+c_1 & n_1(1-n_2)(1-n_3) \end{pmatrix}, \tag{30}
\end{aligned}$$

где индексом i обозначен i -ый узел решетки.

Оператор перестановки Π_{ij} имеет следующий вид:

$$\prod_j \sum_{m_j} |m_j\rangle \langle k_j| \langle m_l| = (-1)^{F(k)} X_{ik}^m X_{jk}^k. \quad (31)$$

Для R -матрицы имеем следующее соотношение (см., например, [12]):

$$\tilde{R}(u)_{ms}^{kq} = \delta_m^k \delta_s^q + u \delta_s^k \delta_m^q; \quad (k, m, s, q = \pm 1/2; \pm 3/2). \quad (32)$$

Согласно (13), оператор Лакса имеет следующий вид:

$$L_l(u) = \begin{pmatrix} \xi_1 & \Theta_1^+ & \Theta_2^+ & \Theta_3^+ \\ \Theta_1 & \xi_2 & G_1 & G_2 \\ \Theta_2 & G_1^+ & \xi_3 & G_3 \\ \Theta_3 & G_2^+ & G_3^+ & \xi_4 \end{pmatrix}, \quad (33)$$

где

$$\begin{aligned} \xi_1(u) &= (1-n_1)(1-n_2)(1-n_3) + u[(1-n_1)(1-n_2)(1-2n_3) + (n_1-n_2)^2(1-n_3)], \\ \xi_2(u) &= -(1-n_1)(1-n_2)n_3 + u[(1-n_1)(1-n_2)(1-2n_3) - (n_1-n_2)^2(1-n_3)], \\ \xi_3(u) &= -(1-n_1)n_2(1-n_3) + u[(1-n_1)(1-n_2)(1-2n_3) - (n_1-n_2)^2(1-n_3)], \\ \xi_4(u) &= -n_1(1-n_2)(1-n_3) + u[(1-n_1)(1-n_2)(1-2n_3) - (n_1-n_2)^2(1-n_3)] \end{aligned} \quad (34)$$

и

$$\begin{aligned} \Theta_1 &= (1-n_1)(1-n_2)c_3, \\ \Theta_2 &= (1-n_1)(1-n_3)c_2, \\ \Theta_3 &= (1-n_1)(1-n_2)c_1, \\ G_1 &= -(1-n_1)c_2^+c_3, \\ G_2 &= -(1-n_2)c_1^+c_3, \\ G_3 &= -(1-n_3)c_1^+c_2. \end{aligned} \quad (35)$$

Из (23) видно, что

$$\Theta_l | -3/2 \rangle = 0; \quad (l=1;2;3), \quad (36)$$

т. е. локальным порождающим вектором (или псевдовакуумом) является низший вектор представления $| -3/2 \rangle$.

4. Спектр трансфер-матрицы и уравнения Бете

Обозначая матрицу монодромии, которая определена, согласно (3), как

$$T(u) = T_j^i(u) = \begin{pmatrix} A(u) & D_1^+(u) & D_2^+(u) & D_3^+(u) \\ D_1(u) & B(u) & D_1(u) & G_2(u) \\ D_2(u) & G_1^+(u) & E(u) & G_3(u) \\ D_3(u) & G_2^+(u) & G_3^+(u) & F(u) \end{pmatrix}, \quad (37)$$

из (15) для (32) получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned} T_m^k(u)T_s^q(v) + (u-v)(-1)^{p(m)p(q)+p(k)p(q)+p(m)p(k)} T_s^k(u)T_m^q(v) = \\ = T_m^k(u)T_s^q(v) + (u-v)(-1)^{p(q)p(s)+p(m)p(q)+p(s)p(m)} T_m^q(v)T_s^k(u). \end{aligned} \quad (38)$$

из которого легко можно получить следующие коммутационные соотношения между матричными элементами матрицы монодромии:

$$\begin{aligned} A(u)C_l^+(v) &= \frac{u-v+1}{u-v} C_l^+(v)A(u) - \frac{1}{u-v} C_l^+(u)A(v); \quad (l=1,2,3), \\ B(u)C_1^+(v) &= \frac{u-v+1}{u-v} C_1^+(v)B(u) - \frac{1}{u-v} C_1^+(u)B(v), \\ E(u)C_2^+(v) &= \frac{u-v+1}{u-v} C_2^+(v)E(u) - \frac{1}{u-v} C_2^+(u)E(v), \\ F(u)C_3^+(v) &= \frac{u-v+1}{u-v} C_3^+(v)F(u) - \frac{1}{u-v} C_3^+(u)F(v), \\ G_1(u)C_2^+(v) &= \frac{u-v+1}{u-v} C_2^+(v)G_1(u) - \frac{1}{u-v} C_2^+(u)G_1(v), \\ G_3(u)C_1^+(v) &= \frac{u-v+1}{u-v} C_3^+(v)G_3(u) - \frac{1}{u-v} C_3^+(u)G_1(v), \\ G_2^+(u)C_1^+(v) &= \frac{u-v+1}{u-v} C_1^+(v)G_2^+(u) - \frac{1}{u-v} C_1^+(u)G_2^+(v), \\ G_3^+(u)C_2^+(v) &= \frac{u-v+1}{u-v} C_2^+(v)G_3^+(u) - \frac{1}{u-v} C_2^+(u)G_3^+(v) \end{aligned} \quad (39)$$

и

$$\begin{aligned} B(u)C_2^+(v) &= C_2^+(v)B(u) + \frac{1}{u-v} (C_1^+(v)G_1(u) - C_1^+(u)G_1(v)), \\ B(u)C_3^+(v) &= C_3^+(v)B(u) + \frac{1}{u-v} (C_1^+(v)G_2(u) - C_1^+(u)G_2(v)), \\ E(u)C_1^+(v) &= C_1^+(v)E(u) + \frac{1}{u-v} (C_2^+(v)G_1^+(u) - C_2^+(u)G_1^+(v)), \\ E(u)C_3^+(v) &= C_3^+(v)E(u) + \frac{1}{u-v} (C_2^+(v)G_3(u) - C_2^+(u)G_3(v)), \\ F(u)C_1^+(v) &= C_1^+(v)F(u) + \frac{1}{u-v} (C_3^+(v)G_2^+(u) - C_3^+(u)G_2^+(v)), \\ F(u)C_2^+(v) &= C_2^+(v)F(u) + \frac{1}{u-v} (C_3^+(v)G_3^+(u) - C_3^+(u)G_3^+(v)), \\ G_1^+(u)C_1^+(v) &= + \frac{u-v+1}{u-v} C_1^+(v)G_1^+(u) - \frac{1}{u-v} C_1^+(u)G_1^+(v), \\ G_1^+(u)C_2^+(v) &= C_2^+(v)G_1^+(u) + \frac{1}{u-v} (E(u)C_1^+(v) - E(v)C_1^+(u)), \\ C_l^+(u)C_l^+(v) &= \frac{1-(u-v)}{1+(u-v)} C_l^+(v)C_l^+(u). \end{aligned} \quad (40)$$

Согласно (10) и (35), для гамильтониана модели получаем

$$H = \sum_{i=1}^N H_{i+1}, \quad (41)$$

где

$$H_{ij} = \Delta_i \Delta_j \left(I_{ij} + \prod_{l=1}^3 P_{ijl} \right) \Delta_i \Delta_j \quad (42)$$

и

$$P_{ijl} = 1 - (c_{il}^+ - c_{ij}^+)(c_{il} - c_{jl}), \quad (43)$$

а

$$\Delta = \frac{1}{2} K. \quad (44)$$

Согласно (36), вектор

$$|0\rangle = \prod_{i=1}^N |-3/2\rangle_i \quad (45)$$

является порождающим вектором. Легко проверить, что

$$\begin{aligned} A(u)|0\rangle &= (u+1)^N |0\rangle, \\ B(u)|0\rangle &= u^N |0\rangle, \\ E(u)|0\rangle &= u^N |0\rangle, \\ F(u)|0\rangle &= u^N |0\rangle. \end{aligned} \quad (46)$$

Из формул (3), (35) и (46) следует, что

$$T(u)|0\rangle = \begin{pmatrix} (u+1)^N & * & * & * \\ 0 & u^N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u^N & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u^N \end{pmatrix} \quad (47)$$

где звездочками обозначены некоторые ненулевые векторы из V . Это означает, что остальные ненулевые собственные векторы матрицы монодромии могут быть только линейными комбинациями векторов

$$D_i^+ |0\rangle. \quad (48)$$

Поэтому будем искать собственные векторы матрицы монодромии в виде линейных комбинаций векторов (48):

$$|v\rangle = (C_1^+(v) + C_2^+(v) + C_3^+(v)) |0\rangle. \quad (49)$$

Можно показать, что

$$\tau(u)|v\rangle = e_N^{(1)}|v\rangle, \quad (50)$$

где

$$e_N^{(1)}|v\rangle = \frac{u-v+1}{u-v}[(u+v)^N - u^N], \quad (51)$$

при условии, что имеет место следующее уравнение Бете:

$$v^N = (v+1)^N. \quad (52)$$

Таким образом, одночастичные (из (47) видно, что операторы можно интерпретировать как операторы рождения) собственные векторы матрицы монодромии найдены. Аналогичным образом находим, что

$$\begin{aligned} \tau(u)|v_1, v_2\rangle &= e_N^{(2)}|v_1, v_2\rangle, \\ e_N^{(2)} &= \frac{u-v_1+1}{u-v_1} \frac{u-v_2+1}{u-v_2} \{(u+1)^N - u^N\} - 2u^N, \end{aligned} \quad (53)$$

при условии, что параметры удовлетворяют следующей системе уравнений Бете:

$$\begin{cases} \frac{u-v_1+1}{u-v_1} \frac{v_2^N - (v_2+1)^N}{u-v_2} - \frac{u-v_1+1}{u-v_1+1} \frac{v_2^N + (v_2+1)^N}{(u-v_1)(v_1-v_2)} = 0, \\ \frac{u-v_2+1}{u-v_2} \frac{v_1^N - (v_1+1)^N}{u-v_1} - \frac{u-v_2+1}{u-v_2+1} \frac{v_1^N + (v_1+1)^N}{(u-v_2)(v_2-v_1)} = 0, \end{cases} \quad (54)$$

а

$$|v_1, v_2\rangle \equiv \sum_{l=1}^3 C_l^+(v_1) C_l^+(v_2). \quad (55)$$

Аналогичным образом можно найти и n -частичные собственные векторы матрицы монодромии, только расчеты более длинные и утомительные.

5. Заключение

В работе исследована решеточная спиновая модель Уймина-Лая-Сазерленда спина $3/2$. Построено представление алгебры $su(2)$ спина $3/2$ в линейном пространстве операторов рождения и уничтожения трех фермионов. Найдены выражение для гамильтониана и энергетический спектр, а также соответствующие уравнения Бете. Данный подход интересен тем, что в нем переход от спиновых операторов к фермионным сделан с помощью преобразований (18), (19) и (22), которые являются альтернативой преобразованиям Йордана-Вигнера.

Автор выражает благодарность А.Г.Седракяну и Д.Р.Караханяну за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. H.Bethe. Z. Phys., 79, 205 (1931).
2. C.N.Yang. Phys. Rev., 168, 1920 (1968).
3. R.J.Baxter. Ann. Phys., 70, 193 (1972), 70, 323 (1972), 76, 1 (1972), 76, 25 (1972).
4. L.Faddeev, L.Takhtajan. Russian Math. Surveys, 34, 11 (1979). V.Korepin, N.M.Bogoliubov, A.Izergin. Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Functions, Cambridge Univ. Press, 1993. Л.А.Тахтаджян, Л.Д.Фаддеев. Гамильтонов подход в теории солитонов. М., Наука, 1986.
5. T.Hakobyan and A.Sedrakyan. Phys. Lett., 377B, 250 (1996).
6. A.Avakyan, T.Hakobyan and A.Sedrakyan. Nucl. Phys., 490B [FS], 633 (1997). J.Ambjorn, A.Avakyan, T.Hakobyan, A.Sedrakyan. Mod. Phys. Let., A 13, 495 (1998).
7. F.Gohmann, Sh.Murakami. J. Phys. A: Math. Gen., bf 31, 7729 (1998).
8. G.Uimin. JETP Lett., 12, 225 (1970).
9. J.K.Lai. J. Math. Phys., 15, 1675 (1974).
10. P.Dargis, Z.Maassarani. Nucl. Phys., 535B, 681 (1998).
11. F.D.M.Haldane. J. Phys., C14, 2585 (1981).
12. B.Sutherland. Phys. Rev., B12, 3795 (1975).
13. J.Ambjorn, D.Karakhanyan, M.Mirumyan, A.Sedrakyan. Nucl. Phys., B599, 547 (2001).

ՈՒՅՄԻՆ-ԼԱՅ-ՍԱԶԵՐԼԵՆԴԻ 3/2 ՍՊԻՆԻ ՍՈՂԵԼԸ ՖԵՐՄԻՈՆՆԵՐԻ
ԾՆՍԱՆ ԵՎ ՈՉՆՉԱՑՍԱՆ ՆԿԱՐԱԳՐԱՄԵՐ

Մ. Բ. ՄԻՐՈՒՄՅԱՆ

Աշխատանքը նվիրված է 3/2 սպինի Ույմին-Լայ-Սազերլենդի մոդելի ուսումնասիրմանը: Կառուցված է $su(2)$ հանրահաշվի ներկայացումը երեք ֆերմիոնների ծնման և ոչնչացման օպերատորների գծային տարածությունում: Գտնված են նաև համիլտոնիանը և էներգիական սպեկտրը, ինչպես նաև Բեթեի համապատասխան հավասարումները:

UIMIN-LAI-SUTHERLAND SPIN-3/2 CHAIN MODEL IN TERMS
OF FERMION CREATION AND ANNIHILATION OPERATORS

M.B. MIRUMYAN

The Uimin-Lai-Sutherland spin-3/2 chain model is investigated. The representation of the $su(2)$ algebra for the spin 3/2 is constructed in the linear space of the creation and annihilation operators of three fermions. Expressions are obtained for the Hamiltonian and energy spectrum as well as the corresponding Bethe equations are derived.