

УДК 531.19

КОМПЛЕКСНЫЕ НУЛИ СТАТИСТИЧЕСКОЙ СУММЫ
Q-ПОЗИЦИОННОЙ ОДНОМЕРНОЙ МОДЕЛИ ПОТТСА

Р.Г. ГУЛГАЗАРЯН

Ереванский физический институт

(Поступила в редакцию 30 января 2002 г.)

С помощью теории динамических систем исследованы нули Янга-Ли и Поттса Q -позиционной одномерной модели Поттса при $Q > 0$. Показано, что в одномерном случае точки фазового перехода на комплексной плоскости можно найти из условия существования нейтральных фиксированных точек. Найдены плотности распределения нулей Янга-Ли и Поттса, а также соответствующие критические показатели. Проведена классификация распределения нулей Янга-Ли и Поттса в зависимости от параметров модели.

1. Введение

В 1952 г. Ли и Янг, рассматривая статистическую сумму (с.с.) модели решеточного газа как полином от фугитивности [1] ($y = e^{\mu}$, где μ – химический потенциал), доказали, что сингулярности термодинамических потенциалов отсутствуют в областях на комплексной плоскости, где нет нулей статистической суммы. Из эквивалентности модели решеточного газа и модели Изинга со спином $1/2$ они доказали теорему о том, что нули с.с. ферромагнитной модели Изинга на комплексной плоскости активности ($z = e^H$, где H – магнитное поле) распределены по единичной окружности с центром в начале координат (нули Янга-Ли), т.е. фазовый переход второго рода происходит только в отсутствие магнитного поля. Позднее, в 1964 г. Фишер [2] исследовал нули с.с. на комплексной температурной плоскости для модели Изинга со спином $1/2$ на квадратной решетке (нули Фишера).

Модель Поттса является одной из наиболее важных моделей в статистической физике [3]. Показано, что при нецелых значениях Q она описывает физические системы как спиновые стекла [4], гелеобразование и вулканизацию в разветвленных полимерных системах [5] и т.д. [3]. Известно также, что с.с. антиферромагнитной модели Поттса при $T=0$ соответствует хроматическому полиному и связана с проблемой раскраски графов [6]. Впервые нули Янга-Ли для ферромагнитной Q -позиционной одномерной модели Поттса были исследованы методом трансфер-

матриц в работе [7]. Наиболее интересным результатом этой работы было то, что при $Q < 1$ нули Янга-Ли заполняют интервал на положительной полуоси. Впоследствии этот результат был подтвержден численно для некоторых $Q < 1$ в работе [8]. Однако до сих пор оставался неясным вопрос о распределении нулей Янга-Ли при $Q < 1$ и малых температурах. В работе [7] указано лишь, что при малых температурах, кроме интервала на действительной оси, существуют также комплексно сопряженные нули Янга-Ли.

В данной работе впервые исследуются нули Поттса, а также проводится полная классификация нулей Янга-Ли и Поттса для ферромагнитной и антиферромагнитной Q -позиционной одномерной модели Поттса. Нулями Поттса называются комплексные нули с.с. относительно параметра Q [9].

2. Модель Поттса

Гамильтониан модели Поттса имеет вид

$$-\beta H = J \sum_{\langle ij \rangle} \delta(\sigma_i, \sigma_j) + h \sum_i \delta(\sigma_i, 0), \quad (1)$$

где $\sigma_i = 0, 1, 2, \dots, Q-1$, $\beta = 1/kT$. Модель ферромагнитная при $J > 0$ и антиферромагнитная при $J < 0$. Суммирование в первой сумме (1) ведется по всем парам ближайших соседних узлов, а во второй – по всем узлам решетки. Переменные Поттса σ_i определены в узлах решетки (рис.1), и число узлов равно $2N+1$. При условии циклических граничных условий $\sigma_N = \sigma_{-N}$, разрезая решетку в центральном узле σ_0 , получим две идентичные ветви (I и II). Обозначив через $g_N(\sigma_0)$ статистический вес одной из ветвей I или II, для с.с. модели получим

$$Z = \sum_{\{\sigma\}} e^{-\beta H} = \sum_{\sigma_0} e^{h\delta(\sigma_0, 0)} g_N^2(\sigma_0). \quad (2)$$

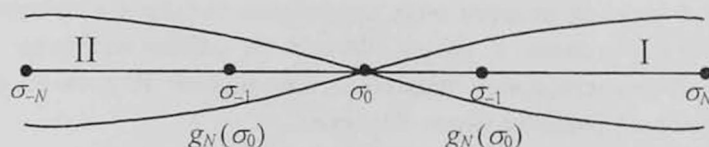


Рис.1. Схема вывода рекуррентного уравнения.

Аналогично, разрезая ветвь I (II) в узле σ_1 (σ_{-1}), получим рекуррентное уравнение для $g_N(\sigma_0)$: $g_N(\sigma_0) = \sum_{\sigma_1} e^{J\delta(\sigma_1, \sigma_0) + h\delta(\sigma_1, 0)} g_{N-1}(\sigma_1)$. Вводя вспомогательную переменную $x_N = g_N(\sigma \neq 0)/g_N(\sigma = 0)$, получим рекуррентное уравнение для x_N , где $z = e^J$ и $\mu = e^h$:

$$x_{N+1} = f(x_N), \quad f(x) = \frac{(z + Q - 2)x + \mu}{(Q - 1)x + z\mu}. \quad (3)$$

Все термодинамические характеристики модели можно выразить через x [10]; например, средняя намагниченность имеет вид

$$M = (NZ)^{-1} \sum_{\sigma_i} \delta(\sigma_i, 0) e^{-\beta H} = \mu(\mu + (Q-1)x)^{-1}.$$

Отображение (3) представляет из себя отображение Мебиуса, динамика которого хорошо исследована [11]. Легко показать, что отображение (3) имеет только фиксированные точки (ф.т.), которые определяются решениями уравнения $f(x)=x$. Согласно теории динамических систем, ф.т. $\bar{x}$ притягивающая, если $|\lambda| < 1$, где $\lambda = f'(\bar{x})$; отталкивающая, если $|\lambda| > 1$ и нейтральная, если $|\lambda| = 1$. Отображение (3) имеет только две ф.т., x_1 и x_2 , причем если одна из ф.т. притягивающая, то другая отталкивающая или обе они нейтральные. С точки зрения стат. физики стабильной фазе соответствует предельное значение сходящегося ряда x_N , при фазовом переходе ряд x_N не сходится. Отсюда следует, что в нашей модели стабильной фазе соответствует притягивающая ф.т., а фазовому переходу – нейтральная ф.т. Как было указано во Введении, фазовым переходам соответствуют нули с.с., значит, нули с.с. ассоциируются с существованием нейтральной ф.т. и их можно найти из условия существования нейтральных ф.т. $f(x)=x$ и $f'(x)=e^{i\varphi}$, где $\varphi \in [0, 2\pi]$. Исключая x из обоих уравнений, получим уравнение для нулей с.с., где $\varphi \in [0, \pi]$:

$$z^2 \mu^2 - 2[(z-1)(z+Q-1)\cos\varphi - Q+1]\mu + (z+Q-2)^2 = 0. \quad (4)$$

3. Нули Янга-Ли

Чтобы найти нули Янга-Ли [1], необходимо решить уравнение (4) относительно μ :

$$\mu_{1,2} = A[2\cos^2 \frac{\varphi}{2} - B \pm 2\sqrt{\cos^2 \frac{\varphi}{2} (\cos^2 \frac{\varphi}{2} - B)}], \quad (5)$$

где $A = (z-1)(z+Q-1)/z^2$ и $B = A^{-1}(z+Q-2)/z$. Из (4) и (5) следует, что $\mu_{1,2}$ либо действительные, либо комплексно сопряженные и лежат на окружности с радиусом $R = |z+Q-2|/z$. Для ферромагнитной модели Поттса ($z > 1$) имеем $B > 1$. Из (5) следует, что $\mu_{1,2}$ комплексно сопряженные и имеют вид $\mu = Re^{i\theta}$, где

$$\cos \frac{\theta}{2} = \sqrt{B^{-1}} \cos \frac{\varphi}{2}. \quad (6)$$

Отсюда очевидно, что не существует решений уравнения (4) в интервале $-\theta_0 < \theta < \theta_0$, где $\theta_0 = 2\arccos\sqrt{B^{-1}}$. Это означает существование щели в распределении нулей Янга-Ли вблизи действительной положительной оси, что соответствует отсутствию фазовых переходов для $Q > 1$. Крайние точки $\mu_{\pm}$ соответствуют $\varphi = 0$ и равны



$$\mu_{\pm} = \frac{1}{z^2} \{ \sqrt{(z-1)(z+Q-1)} \pm \sqrt{1-Q} \}^2.$$

Классификация нулей Янга-Ли для ферромагнитной и антиферромагнитной моделей приведена на рис.2 и 3. Плотность распределения нулей Янга-Ли можно найти, дифференцируя обе части уравнений (4) или (6) относительно μ и φ для действительных ($g(\mu)$) или комплексных ($g(\theta)$) $\mu_{\pm}$ соответственно:

$$g(\mu) = \frac{1}{2\pi\mu} \frac{|\mu - \sqrt{\mu_+\mu_-}|}{\sqrt{(\mu_+ - \mu)(\mu - \mu_-)}}, \quad g(\theta) = \frac{1}{2\pi} \frac{|\sin \frac{\theta}{2}|}{\sqrt{\sin^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta_0}{2}}}. \quad (7)$$

Из (7) следует, что плотности $g(\mu)$ и $g(\theta)$ стремятся к бесконечности при $\theta \rightarrow \theta_0$ или $\mu \rightarrow \mu_{\pm}$ по закону $g(\theta) \propto |\theta - \theta_0|^\sigma$ или $g(\mu) \propto |\mu - \mu_{\pm}|^\sigma$, где σ — критический показатель сингулярности Янга-Ли и $\sigma = -1/2$.

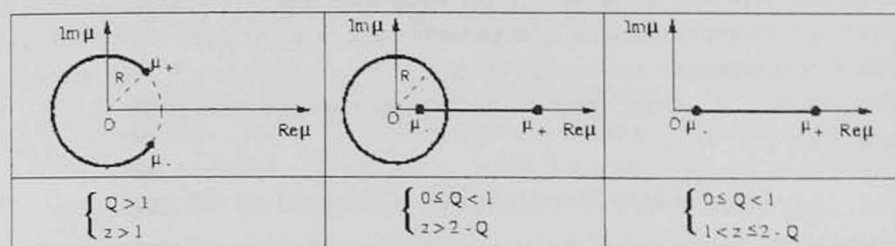


Рис.2. Нули Янга-Ли ферромагнитной модели Поттса.

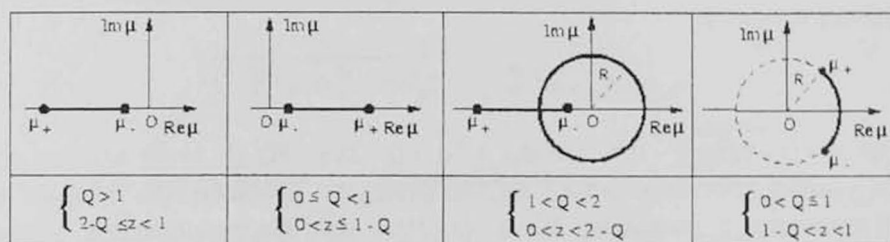


Рис.3. Нули Янга-Ли антиферромагнитной модели Поттса.

4. Нули Поттса

Для того, чтобы найти нули Поттса, рассмотрим уравнение (4) относительно Q . Сделав подстановку $P = Q + z - 1$, уравнение (4) примет вид

$$P^2 - 2P[1 - \mu + \mu(z-1)\cos\varphi] + (1 - z\mu)^2 = 0. \quad (8)$$

Уравнение (8) исследуется аналогично уравнению (4). Результаты представлены на рис.4 и 5, где $R = |1 - z\mu|$. Для комплексных P плотность нулей Поттса имеет вид $g(\theta)$ из (7), где $\theta_0 = 2 \arccos \sqrt{B^{-1}}$ и $B^{-1} = \mu(z-1)(z\mu-1)^{-1}$. Для действительных P плотность нулей Поттса имеет вид $g(\mu)$ из (7) с заменой $\mu \rightarrow P$ и $P_{\pm} = (\sqrt{1-\mu} \pm \sqrt{\mu(z-1)})^2$. В данном случае также нули Поттса накапливаются вблизи точек $P_{\pm}$, и плотность нулей расходится степенным образом с показателем $\sigma = -1/2$.

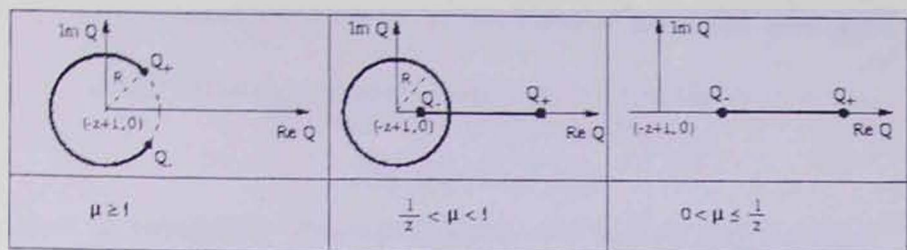


Рис.4. Нули Поттса ферромагнитной модели Поттса.

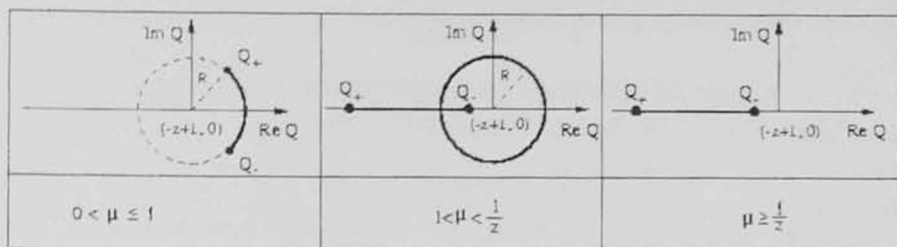


Рис.5. Нули Поттса антиферромагнитной модели Поттса.

5. Заключение

Сравнивая наши результаты с результатами, полученными методом трансфер-матриц [7,9], получим, что фаза φ производной рекурсивной функции $f(x)$ совпадает с разностью фаз двух максимальных собственных значений трансфер-матрицы. Заметим, что при $Q < 1$ в методе трансфер-матриц [7] необходимо рассматривать только два первых собственных значения.

Автор выражает благодарность Н.С.Ананкиану за обсуждение статьи и ценные замечания. Работа выполнена при частичном финансировании из грантов INTAS-97-347 и ISTC-A-102.

ЛИТЕРАТУРА

1. T.D.Lee, C.N.Yang. Phys. Rev., **87**, 404, 410 (1952).
2. M.E.Fisher. Lectures in Theoretical Physics, ed. W.E.Brittin, Univ. of Colorado

Press, Boulder, 1965, v.7c, p.1.

3. F.Y.Wu. Rev. Mod. Phys., **58**, 235 (1982).
4. A.Aharony, P.Pfeuty. J. Phys. C: Solid State Phys., **12**, L125 (1979).
5. T.C.Lubensky, J.Isaacson. Phys. Rev. Lett., **41**, 829 (1978).
6. A. D.Sokal. Physica A, **279**, 324 (2000).
7. Z.Glumac, K.Uzelac. J. Phys. A: Math. Gen., **27**, 7709 (1994).
8. J.L.Monroe. J. Phys. A: Math. Gen., **29**, 5421 (1996).
9. S.-Y.Kim, R.J.Creswick. Phys. Rev. E, **63**, 066107 (2001); B.P.Dolan et al. J. Phys. A: Math. Gen., **34**, 6211 (2001).
10. R.G.Ghulghazaryan. Int. J. Mod. Phys. B, **14**, 589 (2000); N.S.Ananikian, R.G.Ghulghazaryan. Phys. Lett. A, **277**, 249 (2000).
11. A.F.Beardon. Iteration of Rational Functions. Springer, New York, 1991.

ՓՈՒՅՈՒ Չ-ԴԻԲՔԱՅԻՆ ՄԻԱՉԱՓ ՄՈԴԵԼԻ ՎԻՃԱԿԱԳՐԱԿԱՆ
ԳՈՒՄԱՐԻ ԿՈՄՊԼԵՔՍ ԶՐՈՆԵՐԸ

Ռ.Գ. ԴՈՒԼԴԱԶԱՐՅԱՆ

Կիրառելով դինամիկական համակարգերի տեսությունը՝ հետազոտված են Փոքսի Q -դիրքային միաչափ մոդելի Յանգ-Լիի և Փոքսի զրոները ոչ ամբողջ $Q > 0$ համար: Յույց է տրված, որ միաչափ դեպքում կոմպլեքս հարթության վրա փուլային անցման կետերը կարելի է գտնել նեյտրալ կանգուն կետերի գոյության պայմանից: Ստացված են Յանգ-Լիի և Փոքսի զրոների բաշխման խտությունները և համապատասխան կրիտիկական ցուցիչները: Յանգ-Լիի և Փոքսի զրոների բաշխումները դասակարգված են ըստ մոդելի պարամետրների:

COMPLEX ZEROS OF THE PARTITION FUNCTION
OF THE Q -STATE POTTS MODEL

R.G. GHULGHAZARYAN

Using the dynamical systems theory, the Yang-Lee and Potts zeros of the one-dimensional Q -state Potts model are investigated for $Q > 0$. It is shown that in the one-dimensional case the phase transition points on the complex plane may be found from the condition of existence of neutral fixed points. Densities of the Yang-Lee and Potts zeros and corresponding critical exponents are found. The Yang-Lee and Potts zeros are classified depending on the parameters of the model.