Известия НАН Армении, Физика, т.37, №4, с.199-205 (2002)

УДК 535.016

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ТРЕХУРОВНЕВОЙ ЗАДАЧИ В ФУНКЦИЯХ ГУРСА

А.М. ИШХАНЯН, А.М. МАНУКЯН

Инженерный центр НАН Армении

(Поступила в редакцию 1 марта 2002 г.)

Изучена интегрируемость трехуровневой квантово-механической задачи в обобщенных гипергеометрических функциях Гурса ${}_2F_2$. Суммарно получены 4 бесконечных класса моделей, интегрируемых в этих функциях, один из которых является обобщением ранее известного семейства, а остальные – новые.

1. Введение

На всем протяжении развития квантовой физики точно интегрируемые модели привлекали повышенное внимание, ибо часто именно благодаря им удавалось выявить наиболее существенные, качественные стороны происходящих физических процессов (см., например, [1-4]). В пору зарождения квантовой механики аналитические подходы, едва ли не единственно возможные в то время, послужили главной основой для установления базовых парадигм квантовой оптики. Впоследствии нередкими были случаи, когда новые точные решения приводили либо к переосмыслению определенных установившихся представлений, либо к прорыву в новых направлениях исследований. И в настоящее время, с развитием численных методов, аналитические методы не утратили своего значения. Как генераторы точных решений, они продолжают удерживать свои позиции не только в смысле математической техники, обеспечивающей все более высокий порядок приближений расчетных значений выходных параметров задачи, но также и с точки зрения предсказания новых и объяснения уже открытых экспериментально эффектов. Сошлемся, например, на работу [5], по-новому трактующую механизм STIRAP-а (вынужденного адиабатического Рамановского перехода) в трехуровневых системах, и на [6], предсказавшую сужение нецелого порядка интерференционных краев картины дифракции атомов на стоячей волне.

Следует отметить, что хотя по мере углубления в технику аналитических расчетов существенно повышается уровень математической сложности, имеющийся заметный прогресс в развитии общих подходов (например, теорема о классовом свойстве решений [7,8]) позволяет оптимистически смотреть на дальнейшее применение точных методов.

В настоящей работе мы изучаем аналитические решения трехуровневых задач. Следует указать, что трехуровневые модели представляют заметно больший интерес по сравнению с двухуровневыми. Это, очевидно, вызвано тем, что трехуровневые системы имеют более богатую структуру и тем самым предоставляют большие возможности для различных вариаций.

Взаимодействие трехуровневой системы с внешним электромагнитным полем описывается системой из трех дифференциальных уравнений первого порядка, которая сводится к одному обыкновенному дифференциальному уравнению третьего порядка. При этом все известные к настоящему времени решения выражаются в обобщенных гипергеометрических функциях, а именно, в функциях ${}_3F_2$, ${}_2F_2$ и ${}_1F_2$. По этой причине мы начали систематическое исследование этих функций на предмет годности для построения решений трехуровневой задачи для различных квантовых систем. В работах [9] исследовалась функция Клаузена ${}_3F_2$ и на основе метода, разработанного в [7,8], было выявлено 12 бесконечных классов интегрируемых случаев. Здесь мы продолжаем применение данного метода, но уже в приложении к обобщенной гипергеометрической функции ${}_2F_2$, называемой иначе функцией Гурса. В итоге удается построить 4 бесконечных класса интегрируемых трехуровневых моделей, которые могут быть использованы во многих задачах квантовой физики.

2. Новые классы

Уравнения Шредингера в приближении вращающейся волны для амплитуд населенностей уровней a_1, a_2 и a_3 трехуровневой квантовой системы, взаимодействующей с двумя квазирезонансными классическими электромагнитными волнами, имеют вид [10]

$$\begin{aligned} &ia_{1t} = Ue^{-i\delta_1}a_2, \quad ia_{3t} = Ve^{+i\delta_2}a_2, \\ &ia_{2t} = Ue^{i\delta_1}a_1 + Ve^{-i\delta_2}a_3, \end{aligned} \tag{1}$$

где U,V – медленно меняющиеся во времени частоты Раби и $\delta_{1,2}$ – расстройки соответствующих частот полей от атомных, также являющиеся медленными (по сравнению с характерными временами атомных переходов) функциями времени. Исключением a_2 и a_3 из системы (1) задача сводится к нахождению решения следующего линейного дифференциального уравнения третьего порядка:

$$
\begin{gathered}
a_{1ttt}+\left(2i\delta_{1t}-2\frac{U_t}{U}+i\delta_{2t}-\frac{V_t}{V}\right)a_{1tt}+\left[\left(i\delta_{1t}-\frac{U_t}{U}\right)_t+U^2+V^2+\right. \\
\left.+\left(i\delta_{1t}-\frac{U_t}{U}\right)\left(i\delta_{1t}-\frac{U_t}{U}+i\delta_{2t}-\frac{V_t}{V}\right)\right]a_{1t}+U^2\left(i\delta_{1t}+\frac{U_t}{U}+i\delta_{2t}-\frac{V_t}{V}\right)a_1=0 .
\end{gathered} \tag{2}
$$

Нас интересует вопрос, возможно ли осуществить такое взаимно-однозначное преобразование $z=z(t)$ и подобрать такую функцию $P=P(z)$, чтобы после замены

$$a_1(z)=u(z)/\varphi(z) \tag{3}$$

уравнение (2) свелось к уравнению

$$u_{zzz}+\left(\frac{C}{z}-s\right)u_{zz}+\left(\frac{B}{z^2}+\frac{D}{z}\right)u_z+\frac{A}{z^2}u=0 . \tag{4}$$

Это есть уравнение, одним из решений которого является, как известно [11], обобщенная гипергеометрическая функция ${}_2F_2$ (функция Гурса) от переменной sz:

$$
\begin{gathered}
u={}_2F_2(a_1,a_2;b_1,b_2;sz)=1+\frac{a_1a_2}{b_1b_2}sz+\frac{a_1(a_1+1)a_2(a_2+1)}{b_1(b_1+1)b_2(b_2+1)}\frac{(sz)^2}{2}+\ldots, \\
a_{1,2}=-\frac{D/s+1}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{D/s+1}{2}\right)^2+\frac{A}{s}},\quad b_{1,2}=\frac{C-1}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{C-1}{2}\right)^2-B} .
\end{gathered} \tag{5}
$$

Физические требования, накладываемые на задачу, следующие: функции $U(t)$, $V(t)$, $L_{1,2}(t)$ должны быть вещественны и, кроме того, должно быть, для определенности, $U,V>0$. (Следует заметить здесь, что вещественность $L_{1,2}(t)$, вообще говоря, не является обязательным условием. В принципе, эти функции могут содержать чисто мнимые слагаемые. В этом случае модели будут описывать процессы с учетом распада уровней на некие третьи уровни. Однако в настоящей работе мы подобные ситуации не рассматриваем.)

В соответствии с общей методикой [7-9], в качестве функции $z=z(t)$ можно использовать любую физически разумную комплекснозначную функцию от действительной переменной t (времени), удовлетворяющую требованию взаимной однозначности отображения $t\leftrightarrow z$. Тогда, если $a_1^*(z), U^*(z), V^*(z), \delta_{1,2}^*(z)$ удовлетворяют уравнению, полученному из (2) переписыванием для переменной z, то для функций $U(t)$, $V(t)$, $\delta_{1,2}(t)$, определяемых соотношениями

$$U(t)=U^*(z)\frac{dz}{dt},\quad V(t)=V^*(z)\frac{dz}{dt},\quad \frac{d\delta_{1,2}(t)}{dt}=\frac{d\delta_{1,2}^*(z)}{dz}\frac{dz}{dt}, \tag{6}$$

решение исходной задачи выражается согласно (3), как

$a_1(t) = u(z(t)) / \varphi(z(t))$. В силу того, что функции $z = z(t)$ составляют континуум, множество функций $U(t), V(t), \delta_{1,2}(t)$, построенных на выбранном базисе $U^*(z), V^*(z), \delta^*_{1,2}(z)$, составляет класс.

Анализ коэффициентов уравнения (4) подсказывает выбор функций $U^*(z), V^*(z), \delta^*_{1,2}(z)$ и $\varphi(z)$ в виде

$$U^* = U_0^* z^{k_1}, \quad V^* = V_0^* z^{k_2}, \quad \delta^*_{1,2z} = \frac{\beta_{1,2}}{z} + \gamma_{1,2}, \quad \varphi(z) = \exp(\lambda z). \tag{7}$$

После сравнения коэффициентов при одних и тех же порядках $\frac{d^n a_1}{dz^n}$ в (2) и (4) получается система уравнений

$$\frac{i(2\beta_1 + \beta_2) - (2k_1 + k_2)}{z} + i(2\gamma_1 + \gamma_2) = 3\lambda - s + \frac{C}{z}, \tag{8}$$

$$\begin{gathered} -\frac{i\beta_1 - k_1}{z^2} + \left(\frac{i\beta_1 - k_1}{z} + i\gamma_1\right)\left[\frac{i(\beta_1 + \beta_2) - (k_1 + k_2)}{z} + i(\gamma_1 + \gamma_2)\right] + \\ + U_0^{*2} z^{2k_1} + V_0^{*2} z^{2k_2} = 3\lambda^2 - 2\lambda s + \frac{2\lambda C + D}{z} + \frac{B}{z^2}, \end{gathered} \tag{9}$$

$$U_0^{*2} z^{2k_1}\left[\frac{i(\beta_1 + \beta_2) + k_1 - k_2}{z} + i(\gamma_1 + \gamma_2)\right] = \lambda^2(\lambda - s) + \frac{\lambda(\lambda C + D)}{z} + \frac{(\lambda B + A)}{z^2}. \tag{10}$$

Из (8) сразу вытекают универсальные формулы для свободных параметров C и s:

$$C = i(2\beta_1 + \beta_2) - (2k_1 + k_2), \tag{11}$$

$$s = 3\lambda - i(2\gamma_1 + \gamma_2), \tag{12}$$

а (9),(10) дают следующие выражения для параметров B, D и A:

$$B = (i\beta_1 - k_1)\left[i(\beta_1 + \beta_2) - (k_1 + k_2 + 1)\right] + U_0^{*2}\delta_{-1,k_1} + V_0^{*2}\delta_{-1,k_2}, \tag{13}$$

$$\begin{gathered} D = i(i\beta_1 - k_1)(\gamma_1 + \gamma_2) + i\gamma_1\left[i(\beta_1 + \beta_2) - (k_1 + k_2)\right] + \\ + U_0^{*2}\delta_{-1/2,k_1} + V_0^{*2}\delta_{-1/2,k_2} - 2\lambda C, \end{gathered} \tag{14}$$

$$A = -\lambda B + iU_0^{*2}(\gamma_1 + \gamma_2)\delta_{-1,k_1} + U_0^{*2}\left[i(\beta_1 + \beta_2) + k_1 - k_2\right]\delta_{-1/2,k_1}, \tag{15}$$

где $\delta_{\alpha,\beta}$ – символ Кронекера ($\delta_{\alpha,\beta}=1$, когда $\alpha=\beta$, и 0, когда $\alpha\neq\beta$).

Далее, из (9) следует, что, во-первых $k_1, k_2 \in \{0, -1/2, -1\}$ и, во-вторых, накладывается дополнительное ограничение

$$\lambda(3\lambda - 2s) = -\gamma_1(\gamma_1 + \gamma_2) + U_0^{*2}\delta_{0,k_1} + V_0^{*2}\delta_{0,k_2}. \tag{16}$$

Еще три дополнительных ограничения на параметры задачи накладывает уравнение (10):

$$\begin{aligned} &\lambda(\lambda C + D) = iU_0^{*2}(\gamma_1+\gamma_2)\delta_{-1/2,k_1} + U_0^{*2}\left[i(\beta_1+\beta_2)+k_1-k_2\right]\delta_{0,k_1}, \\ &\lambda^2(\lambda - s) = iU_0^{*2}(\gamma_1+\gamma_2)\delta_{0,k_1}, \qquad \left[i(\beta_1+\beta_2)+k_1-k_2\right]\delta_{-1,k_1} = 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Уравнения (16) и (17) представляют собой конфликтные уравнения, которые могут быть удовлетворены лишь при определенных выборах входных параметров задачи U_0^*, V_0^*, $\beta_{1,2}$, $\gamma_{1,2}$. Детальный анализ всевозможных конфигураций позволяет выделить в конечном счете 4 независимых класса, которые вместе с налагаемыми на входные параметры окончательными ограничениями (получающимися в результате разрешения уравнений (16)-(17)) сведены в Таблицу 1 [где обозначено $\eta = [(\gamma_1(\gamma_1+\gamma_2)+2U_0^{*2})/(\gamma_1+2\gamma_2)]$. В таблицу, ввиду тривиальности, не включена разрешенная конфигурация $k_1=k_2=0$, т. е. U^*, $V^* = \text{const}$, $\delta_{1,2z}^* = \text{const}$ (класс Раби). Таким образом, одно из решений исходной трехуровневой задачи (1) для перечисленных четырех классов задается формулами (3), (5), (11)-(15) с $\varphi = e^{\lambda z}$. Два других независимых решения также записываются с помощью функции Гурса (см., например, [12]). Все доселе известные решения трехуровневой задачи, интегрируемые в функциях Гурса, представляют собой частные случаи моделей, представленных в приведенной таблице. Например, 2-й класс суть обобщение семейства [12] (в этой работе наложено дополнительное ограничение двухфотонного резонанса).

Таблица 1

N	k_1	k_2	U^*	V^*	δ_{1z}^*	δ_{2z}^*	Ограничения	λ
1.	−1	−1	$\frac{U_0^*}{z}$	$\frac{V_0^*}{z}$	β_1/z $\gamma_1+\beta_1/z$ $\gamma_1+\beta_1/z$	$\gamma_2-\beta_1/z$ $-\beta_1/z$ $-\gamma_1-\beta_1/z$	$\beta_2=-\beta_1, \gamma_1=0,\ \gamma_2\neq 0$ $\beta_2=-\beta_1, \gamma_2=0,\ \gamma_1\neq 0$ $\beta_2=-\beta_1, \gamma_2=-\gamma_1,\ \gamma_2\neq 0$	0 $i\gamma_1$ 0
2.	−1/2	−1	$\frac{U_0^*}{\sqrt{z}}$	$\frac{V_0^*}{z}$	$\gamma_1+\beta_1/z$ $\gamma_1+\beta_1/z$	$\beta_2/z-\gamma_1$ β_2/z	$\gamma_2=-\gamma_1,\ \gamma_1\neq 0$ $\gamma_2=0,\quad \gamma_1\neq 0$	0 $i\gamma_1$
3.	0	−1	U_0^*	$\frac{V_0^*}{z}$	$\gamma_1+\beta_1/z$	$\beta_2/z+\gamma_2$	$\gamma_2\neq -\gamma_1/2,$ $U_0^{*2}=\gamma_2(\gamma_1+\gamma_2)$	$i\eta$
4.	−1/2	−1/2	$\frac{U_0^*}{\sqrt{z}}$	$\frac{V_0^*}{\sqrt{z}}$	$\gamma_1+\beta_1/z$	$\beta_2/z-\gamma_1$	$\gamma_2=-\gamma_1,\ \gamma_1\neq 0$	0

3. Заключение

Таким образом, данная работа, являющаяся второй в серии исследований обобщенных гипергеометрических функций, могущих послужить в качестве основы для построения решений трехуровневой задачи, выявила четыре класса моделей, для которых решение исходной задачи выражается в функциях Гурса. Один из этих классов является обобщением класса Кэрролла-Хью [12], остальные – новые. Мы надеемся, что описанные модели найдут применения в различных задачах квантовой физики. Например, четвертый класс охватывает интересный вариант трехуровневой задачи Ландау–Зинера о пересечении термов. Мы надеемся провести анализ этого и других физически важных случаев в ближайшем будущем.

В заключение укажем, что роль точно интегрируемых моделей не ограничивается лишь развитием аппарата теории модельных линейных квантовых систем. Фактически, как показывает практика, они играют важную роль и в построении начальных приближений в задачах слабонелинейных систем, таких, как Бозе-Энштейновский конденсат атомарных газов, взаимодействующий со (слабыми) внешними волнами. Подобные задачи часто представляют значительные трудности для численного моделирования из-за крайне медленного установления квазистационарных режимов. Этот аспект (возможно, наиболее актуальный в настоящий момент) также числится в списке проблем, к изучению которых мы надеемся приступить в ближайшем будущем.

Работа выполнена при поддержке грантов Международного Научно-Технического Центра No. A-215-99 и PA No. 0591-2002.

ЛИТЕРАТУРА

1. **L.D.Landau.** Phys. Z. Sovjetunion, **2**, 46 (1932); **C.Zener.** Proc. Roy. Soc. (London), ser. A, **137**, 696 (1932).
2. **N. Rosen, C. Zener.** Phys. Rev., **40**, 502 (1932).
3. **A. Bambini, P.R. Berman.** Phys. Rev. A, **23**, 2496 (1981)); **Ю.Н. Демков, М. Кунике.** Вестник Ленингр. ун-та, Физ., Хим., **16**, 39 (1969).
4. **C.E.Carroll and F.T.Hioe.** Phys. Rev. A, **42**, 1522 (1990); **C.E.Carroll and F.T. Hioe.** J. Opt. Soc. Am. B, **5**, 1335 (1988)); **C.E.Carroll and F.T.Hioe.** Phys. Rev. A, **36**, 724 (1987).
5. **A.M.Ishkhanyan and K.-A.Suominen.** Phys. Rev. A, **65**, 051403(R) (2002).
6. **A.M.Ishkhanyan.** Phys. Rev. A, **61**, 063609 (2000).
7. **A.M. Ishkhanyan.** J. Phys. A, **30**, 450 (1997); **A.M. Ishkhanyan.** Optics Communications, **176**, 155 (2000).
8. **A.M. Ishkhanyan.** J. Physics A: Math. Gen., **33**, 5539 (2000); **A.M.Ishkhanyan and K.-A.Suominen.** J. Phys. A: Math. Gen., **34**, 6301 (2001).
9. **A.M. Ishkhanyan.** J. Physics A: Math. Gen., **33**, 5041 (2000); **А.М.Ишханян.** Доклады НАН РА (в печати).
10. **B.W. Shore.** The Theory of Coherent Atomic Excitation, New York, Wiley, 1990; **L. Allen, J.H. Eberly.** Optical Resonance and Two-Level Atoms. New York, Wiley, 1975.
11. **L.J.Slater.** Generalized Hypergeometric Functions, Cambridge University Press, Cambridge, 1966; **A. Erdelyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F.G. Tricomi.** Higher Transcendental Functions, New York, McGraw-Hill, 1953.
12. **C.E.Carroll and F.T.Hioe.** J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys., **22**, 2633 (1989).

ԵՌԱՄԱԿԱՐԴԱԿ ԽՆԴՐԻ ՃՇԳՐԻՏ ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐԸ ԳՈՒՐՍԱՅԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐՈՎ

Ա.Մ. ԻՇԽԱՆՅԱՆ, Ա.Մ. ՄԱՆՈՒԿՅԱՆ

Ուսումնասիրված է Գուրսայի ընդհանրացված հիպերերկրաչափական $_2F_2$ ֆունկցիաներով եռամակարդակ քվանտամեխանիկական խնդրի ինտեգրումը: Ստացված է այդ ֆունկցիաներով ինտեգրվող մոդելների ընդհանուր առմամբ 4 անսահման դաս, որոնցից մեկը իրենից ներկայացնում է մինչ այդ հայտնի ընտանիքի ընդհանրացումը, իսկ մյուսները՝ նոր են:

EXACT SOLUTIONS OF THE THREE-LEVEL PROBLEM IN TERMS OF GOURSAT FUNCTIONS

A.M. ISHKHANYAN, A.M. MANUKYAN

The integrability of the three-level quantum-mechanical problem in terms of generalized hypergeometric functions $_2F_2$ is studied. A total of 4 infinite classes of models integrable in terms of these functions is derived one of which is a generalization of the previously known subfamily, and the others are new.