

УДК 537.87

## ИЗЛУЧЕНИЕ ОСЦИЛЛЯТОРА, РАВНОМЕРНО ДВИЖУЩЕГОСЯ ПО ОСИ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА

А.С. КОТАНДЖЯН, А.А. СААРЯН

Институт прикладных проблем физики НАН Армении

(Поступила в редакцию 15 февраля 2002 г.)

Рассмотрено излучение заряженного продольного осциллятора, равномерно движущегося по оси погруженного в однородную среду диэлектрического цилиндра. Выведена формула для спектрально-углового распределения интенсивности этого излучения. При выполнении условия Черенкова для внешней среды эта формула состоит из двух слагаемых. Первое из них соответствует излучению с непрерывным спектром, которое распространяется под черенковским углом внешней среды. Второе же слагаемое описывает излучение, которое обладает дискретным спектром при фиксированных углах распространения. Соответствующие частоты являются кратными частоте колебаний осциллятора с учетом эффекта Доплера. Приведены результаты численных расчетов углового распределения числа излученных квантов и проводится сравнение с соответствующими величинами для излучения в однородной среде. Показано, что наличие цилиндра может существенно увеличить интенсивность излучения.

### 1. Введение

В работе [1] развита рекуррентная схема для построения функции Грина электромагнитного поля в неоднородной среде с произвольным числом соосных однородных цилиндрических слоев. Приложения полученных общих формул к конкретным задачам об излучении заряда, вращающегося внутри и вне диэлектрического волновода, погруженного в однородную среду, рассмотрены в [2-4]. В частности, было показано, что при определенных значениях параметров наличие цилиндра приводит к тому, что в угловом распределении интенсивности излучения имеются сильно выраженные пики, в которых плотность числа квантов превышает соответствующую величину для излучения в вакууме на несколько порядков. Ранее аналогичные результаты для сред со сферической симметрией были получены в работах [5,6].

В данной работе на основе найденной в [1] функции Грина, исследовано излучение продольного осциллятора, равномерно движущего-

ся по оси диэлектрического цилиндра. Излучение заряженных осцилляторов в вакууме и в неоднородных средах рассматривалось в целом ряде работ (см., например, [7-13] и приведенные там ссылки) в связи со многими возможными приложениями (генерация излучения, детектирование частиц высоких энергий и т. д.). В частности, излучение осциллятора в безграничной периодической среде исследовано в [7,8]. Частотно-угловое распределение интенсивности излучения осциллятора, движущегося над границей раздела двух сред, рассмотрено в [9,11].

## 2. Поля осциллятора

Пусть точечный заряд  $q$  движется по оси диэлектрического цилиндра с проницаемостью  $\epsilon_0$  и радиусом  $\rho_1$ . Вся эта система погружена в среду с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_1$ . Мы рассмотрим случай, когда движение заряда является наложением равномерного перемещения со скоростью  $v_0$  и колебания с циклической частотой  $\omega_0$  и амплитудой  $z_0$ :

$$z = v_0 t + z_0 \sin \omega_0 t, \quad x = y = 0, \quad (1)$$

где декартова ось  $z$  совпадает с осью цилиндра.

В соответствующем образом выбранной цилиндрической системе координат  $(\rho, \phi, z)$  пространственная часть 4-мерного вектора плотности тока, создаваемого этим зарядом, запишется в виде

$$j_l = \frac{q}{\rho} v \delta(\rho) \delta(\phi) \delta(z - v_0 t - z_0 \sin \omega_0 t) \delta_{l3}, \quad l = 1, 2, 3. \quad (2)$$

Соответствующее решение уравнений Максвелла для 4-вектора потенциала выражается через функцию Грина (ФГ) электромагнитного поля (являющейся тензором второго ранга):

$$A_l(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{2\pi^2 c} \int G_{il}(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t') j_l(\mathbf{r}', t) d\mathbf{r}' dt', \quad l = t, \rho, \phi, z. \quad (3)$$

Вследствие цилиндрической симметрии рассматриваемой здесь задачи удобно представить ФГ в виде следующего Фурье-разложения:

$$G_{il}(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t') = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z d\omega G_{il}(m, k_z, \omega, \rho, \rho') \exp[im(\phi - \phi') + ik_z(z - z') - i\omega(t - t')]. \quad (4)$$

Для диэлектрического цилиндра с проницаемостью  $\epsilon_0$ , погруженного в однородную среду с проницаемостью  $\epsilon_1$ , фигурирующий в (4) Фурье-образ ФГ, был найден в работе [1]. При  $\rho' < \rho_1$  функция  $G_{il}(m, k_z, \omega, \rho, \rho')$  зависит от  $\rho'$  через функцию Бесселя  $J_m(\lambda \rho')$ . Для краткости здесь и ниже мы пользуемся обозначением

$$\lambda_j^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_j - k_z^2, \quad j = 0, 1. \quad (5)$$



Вследствие наличия функции  $\delta(\rho')$  в выражении (2) для плотности тока, из (3) следует, что ненулевой вклад в векторный потенциал дает только слагаемое с  $m=0$ . В результате поле не зависит от угла  $\phi$ . Это является простым следствием азимутальной симметрии рассматриваемой задачи. Таким образом, нам достаточно иметь выражения для  $G_{iz}(m=0, k_z, \omega, \rho, \rho'=0) \equiv G_{iz}(k_z, \omega, \rho)$ . В лоренцевой калибровке эти выражения непосредственно получаются из общих формул работы [1]:

$$G_{pz}(k_z, \omega, \rho) = -i \frac{(1 - \varepsilon_0 / \varepsilon_1) k_z H_0(\lambda_1 \rho_1)}{\rho_1 \lambda_0 W(J_0, H_0) W_\varepsilon(J_0, H_0)} J_1(\lambda_0 \rho_<) H_1(\lambda_1 \rho_>), \quad \rho_< = \min(\rho, \rho_1),$$

$$G_{\phi z}(k_z, \omega, \rho) = 0,$$

$$G_{zz}(k_z, \omega, \rho) = \frac{\pi}{2iW(J_0, H_0)} \begin{cases} W(J_0, H_0) H_0(\lambda_0 \rho) - W(H_0, H_0) J_0(\lambda_0 \rho), & \rho < \rho_1, \\ \frac{2i}{\pi \rho_1} H_0(\lambda_1 \rho), & \rho > \rho_1, \end{cases}$$

где  $H_m(x) \equiv H_m^{(1)}(x)$  — функция Ханкеля первого рода. В этих формулах введены следующие обозначения:

$$W(a, b) = a(\lambda_0 \rho_1) \frac{\partial b(\lambda_1 \rho_1)}{\partial \rho_1} - b(\lambda_1 \rho_1) \frac{\partial a(\lambda_0 \rho_1)}{\partial \rho_1},$$

$$W_\varepsilon(J_0, H_0) = J_0(\lambda_0 \rho_1) H_1(\lambda_1 \rho_1) - \frac{\varepsilon_0 \lambda_1}{\varepsilon_1 \lambda_0} J_1(\lambda_0 \rho_1) H_0(\lambda_1 \rho_1).$$

При определении  $\lambda_1$  из (5) следует учесть, что при наличии мнимой части  $\varepsilon_1''(\omega)$  диэлектрической проницаемости,  $\varepsilon_1 = \varepsilon_1' + i\varepsilon_1''$ , а также при  $\omega^2 \varepsilon_1' / c^2 < k_z^2$ , поле должно быть экспоненциально затухающим при больших  $\rho$ . Это приводит к следующему соотношению:

$$\lambda_1 = \begin{cases} \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1 - k_z^2 \frac{c^2}{\omega^2}}, & \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1 > k_z^2, \\ i \sqrt{k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1}, & \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1 < k_z^2. \end{cases} \quad (8)$$

В частности, отсюда следует, что в приведенных выше формулах

$$H_m(\lambda_1 \rho) = \begin{cases} H_m^{(1)}(\lambda_1 \rho), & \lambda_1 > 0, \\ -H_m^{(2)}(|\lambda_1| \rho), & \lambda_1 < 0, \\ 2K_m(|\lambda_1| \rho) e^{-m\pi/2} / \pi i, & \lambda_1^2 < 0. \end{cases} \quad (9)$$

Отметим, что при  $\lambda_1^2 > 0$  знак  $\lambda_1$  можно определить также из принципа излучения (разные знаки  $\omega t$  и  $\lambda_1 \rho$  в формулах для полей) при больших  $\rho$ . Подставив (2) и (4) в формулу (3), для компонент векторного потенциала находим

$$A_i(\rho, z, t) = -\frac{q}{\pi c} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \exp[i(zk_z - \omega_n(k_z)t)] G_{iz}(k_z, \omega_n(k_z), \rho) J_n(k_z z_0) \frac{\omega_n(k_z)}{k_z}. \quad (10)$$

где

$$\omega_n(k_z) = n\omega_0 + k_z v_0. \quad (11)$$

Поля внутри и вне волновода получаются с учетом соответствующих выражений (6) для компонент редуцированной ФГ. В дальнейшем нас будет интересовать поле в области  $\rho > \rho_1$ . С учетом выражений (6) из формулы (10) для векторного потенциала в этой области имеем

$$A_i(\rho, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \exp[i(k_z z - \omega_{n,z} t)] A_{ni}(k_z, \rho), \quad i = \rho, z, \phi, \quad (12)$$

где коэффициенты  $A_{ni}$  определяются соотношениями

$$\begin{aligned} A_{n\rho} &= \frac{qi}{\pi c \rho_1} \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)\omega_n(k_z)}{\varepsilon_1 \lambda_0} \frac{H_0(\lambda_1 \rho_1) J_1(\lambda_0 \rho_1)}{W_\varepsilon(J_0, H_0) W(J_0, H_0)} H_1(\lambda_1 \rho) J_n(k_z z_0), \\ A_{nz} &= -\frac{q}{\pi c \rho_1} \frac{\omega_n(k_z)}{W(J_0, H_0) k_z} H_0(\lambda_1 \rho) J_n(k_z z_0), \\ A_{n\phi} &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Легко убедиться, что  $A_{ni}$  как функции от  $k_z$  не имеют особых точек. Из условия калибровки Лоренца, с учетом симметрии рассматриваемой задачи, для скалярного потенциала  $\varphi_n$  находим  $\varphi_n(k_z, \rho) = (\partial(\rho A_{n\rho})/\partial\rho + ik_z \rho A_{nz})c/(i\omega_n(k_z)\varepsilon_1 \rho)$ . Из формулы (12) видно, что аналогичные разложения можно написать и для напряженностей электромагнитного поля. Имея векторный и скалярный потенциалы, можно найти соответствующие фурье-коэффициенты напряженностей электромагнитного поля:

$$\begin{aligned} E_{n\rho} &= \frac{q}{\pi \rho_1 \varepsilon_1} \frac{J_n(k_z z_0)}{W_\varepsilon(J_0, H_0)} H_1(\lambda_1 \rho), \quad E_{nz} = \frac{iq}{\pi \rho_1 \varepsilon_1} \frac{\lambda_1 J_n(k_z z_0)}{k_z W_\varepsilon(J_0, H_0)} H_0(\lambda_1 \rho), \quad E_{n\phi} = 0, \\ H_{n\phi} &= \frac{q\omega_n(k_z)}{\pi c \rho_1 k_z} \frac{J_n(k_z z_0)}{W_\varepsilon(J_0, H_0)} H_1(\lambda_1 \rho), \quad H_{n\rho} = H_{nz} = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Из формул (14) следует, что  $\mathbf{E}_n \cdot \mathbf{H}_n = 0$ , т.е. напряженность электрического поля и индукция магнитного поля перпендикулярны и можно написать  $\mathbf{E}_n = [\mathbf{b} \mathbf{H}_n]$ ,  $\mathbf{b} = -c(\lambda_1, 0, k_z)/\omega_n(k_z)\varepsilon_1$ . Перейдем теперь к рассмотрению интенсивности излучения во внешнее пространство.

### 3. Спектрально-угловое распределение интенсивности излучения на больших расстояниях от заряда

Средний поток энергии за единицу времени через боковую поверхность бесконечно длинного цилиндра, соосного с рассматриваемым



диэлектрическим цилиндром, дается вектором Пойнтинга  $S$ :

$$I = \frac{2\pi}{T} \int_0^T dt \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}_\rho) \rho dz, \quad \mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \mathbf{H}], \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0}. \quad (15)$$

С учетом формул (12) и (14) отсюда получим

$$I = -\frac{q^2 \rho i}{\pi \rho_1^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \frac{\lambda_1 \omega_n(k_z)}{\varepsilon_1 k_z^2} \frac{J_n^2(k_z z_0)}{|W_\varepsilon(J_0, H_0)|^2} H_0(\lambda_1 \rho) H_1^*(\lambda_1 \rho). \quad (16)$$

Воспользовавшись тем, что при замене  $n \rightarrow -n$ ,  $k_z \rightarrow -k_z$  имеем  $\omega_n(k_z) \rightarrow -\omega_n(k_z)$ ,  $\lambda_1 \rightarrow -\lambda_1$ , выражение (16) можно записать в явно действительном виде

$$I = \frac{2q^2 \rho}{\pi \rho_1^2} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \frac{\lambda_1 \omega_n(k_z)}{\varepsilon_1 k_z^2} \frac{J_n^2(k_z z_0)}{|W_\varepsilon(J_0, H_0)|^2} \text{Im}[H_0(\lambda_1 \rho) H_1^*(\lambda_1 \rho)], \quad (17)$$

где штрих над суммой означает, что слагаемое с  $n=0$  следует брать с весом  $1/2$ .

Прежде всего рассмотрим случай  $\omega_0 = 0$ , который соответствует равномерному движению заряда по оси диэлектрического цилиндра. Теперь согласно (11), (5)  $\omega_n(k_z)$  и  $\lambda_j$  не зависят от  $n$ , и ряд в (17) легко суммируется с помощью стандартной формулы  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n^2(k_z z_0) = 1$ . Перейдя к интегрированию по  $\omega = k_z v_0$ , получим

$$I = \frac{2q^2 \rho}{\pi \rho_1^2} \int_0^{\infty} d\omega \frac{\sqrt{\beta_1^2 - 1}}{\varepsilon_1 |W_\varepsilon(J_0, H_0)|^2} \text{Im}[H_0(\lambda_1 \rho) H_1^*(\lambda_1 \rho)], \quad \beta_1 = \frac{v_0}{c} \sqrt{\varepsilon_1}. \quad (18)$$

Если условие Черенкова для внешней среды не выполняется, то поток (18) экспоненциально убывает на больших расстояниях от траектории заряда и излучение на бесконечности отсутствует. При условии же  $\beta_1 > 1$ , воспользовавшись асимптотическими выражениями функции Ханкеля при больших значениях аргумента [14], имеем

$$I = \frac{4q^2 v_0}{\pi^2 \rho_1^2} \int_{\beta_1^2 > 1} d\omega \frac{|W_\varepsilon(J_0, H_0)|^{-2}}{\varepsilon_1 \omega}. \quad (19)$$

Нетрудно показать, что это выражение совпадает с формулой, приведенной, например, в [15] для излучения заряда, движущегося параллельно оси цилиндрического канала в диэлектрике. Введя угол  $\vartheta$  волнового вектора с осью цилиндра, из соотношения  $\omega = k_z v_0$  получим  $\cos \vartheta = \beta_1^{-1}$ , т.е. излучение (19) распространяется под черенковским углом внешней среды. При  $\varepsilon_0 = \varepsilon_1$  из (19) получим известную формулу для интенсивности черенковского излучения в однородной среде [13].

Вернемся теперь к общему случаю, когда  $\omega_0 \neq 0$ . Рассмотрим

сначала слагаемое  $n=0$  в формуле (17). Аналогично выводу (19), нетрудно показать, что соответствующий вклад в интенсивность излучения определяется формулой

$$I_{n=0} = \frac{4q^2 v_0}{\pi^2 \rho_1^2} \int_{\beta_1^2 > 1} d\omega \frac{J_0^2(\omega z_0 / v_0)}{\varepsilon_1 \omega |W_\varepsilon(J_0, H_0)|^2}. \quad (20)$$

Это излучение распространяется под черенковским углом внешней среды, а интенсивность отличается от величины интенсивности равномерного движущегося заряда (19) наличием зависящего от частоты дополнительного весового фактора  $J_0^2(\omega z_0 / v_0)$ .

Перейдем к слагаемым  $n \neq 0$  в формуле (17). Когда  $\lambda_1^2 < 0$ , то согласно (9) поле экспоненциально затухает с расстоянием и излучение отсутствует. При действительном же  $\lambda_1$  поле при больших  $\rho$  имеет характер излучения, и с учетом (11) имеем квадратное неравенство относительно  $k_z$ :

$$k_z^2(1 - \beta_1^{-2}) + 2k_z \frac{n\omega_0}{v_0} + \frac{n^2 \omega_0^2}{v_0^2} > 0. \quad (21)$$

Пусть сначала для поступательной скорости заряда условие Черенкова не выполнено,  $\beta_1 < 1$ . В этом случае из этого неравенства имеем

$$k_z \in \left( -\frac{n\omega_0 \sqrt{\varepsilon_1}}{c(1 + \beta_1)}, \frac{n\omega_0 \sqrt{\varepsilon_1}}{c(1 - \beta_1)} \right). \quad (22)$$

Удобно ввести новую переменную  $\vartheta$  согласно

$$k_z = \frac{n\omega_0}{c} \frac{\cos \vartheta}{1 - \beta_1 \cos \vartheta} \sqrt{\varepsilon_1}, \quad (23)$$

где из (22) следует, что  $\vartheta \in (0, \pi)$ . Из соотношения (11) теперь для  $\omega_n(k_z)$  имеем

$$\omega_n(k_z) = \frac{n\omega_0}{1 - \beta_1 \cos \vartheta}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (24)$$

Заметим, что согласно (23), (24) величины  $k_z$  и  $\omega_n(k_z)$  связаны соотношением  $k_z = \omega_n(k_z) \sqrt{\varepsilon_1} \cos \vartheta / c$ .

Рассмотрим теперь случай  $\beta_1 > 1$ , когда решение неравенства (21) имеет вид

$$k_z \in \left( -\infty, -\frac{n\omega_0 \sqrt{\varepsilon_1}}{c(\beta_1 - 1)} \right) \cup \left( -\frac{n\omega_0 \sqrt{\varepsilon_1}}{c(\beta_1 + 1)}, +\infty \right). \quad (25)$$

Введя снова переменную  $\vartheta$  согласно (23), убеждаемся, что она меняется в пределах  $\vartheta \in (0, \vartheta_0 -) \cup (\vartheta_0 +, \pi)$ , где  $\vartheta_0 = \arccos(\beta_1^{-1})$  — соответствующий



угол Черенкова. Соотношения между переменными  $k_z, \omega_n(k_z), \vartheta$  теперь те же, что и при  $\beta_1 < 1$ . На больших расстояниях от траектории заряда зависимость элементарных волн от пространственно-временных координат имеет вид  $\exp[\omega_n(k_z)\sqrt{\varepsilon_1}(\rho \sin \vartheta + z \cos \vartheta - ct/\sqrt{\varepsilon_1})/c]$ , который описывает волну с частотой

$$\omega_n = |\omega_n(k_z)| = \frac{n\omega_0}{|1 - \beta_1 \cos \vartheta|}, \quad (26)$$

распространяющейся под углом  $\vartheta$  к оси  $z$ . Формула (26) описывает нормальный эффект Доплера в случаях  $\beta_1 < 1$  и  $\beta_1 > 1, \vartheta > \vartheta_0$  и аномальный эффект Доплера в случае  $\beta_1 > 1, \vartheta < \vartheta_0$  [13]. С учетом приведенных выше формул выражения для  $\lambda_i$  запишутся в виде

$$\lambda_1 = \frac{n\omega_0}{v_0} \frac{\beta_1}{1 - \beta_1 \cos \vartheta} \sin \vartheta, \quad \lambda_0 = \frac{n\omega_0}{v_0} \frac{\beta_1}{1 - \beta_1 \cos \vartheta} \sqrt{\varepsilon_0 / \varepsilon_1 - \cos^2 \vartheta}. \quad (27)$$

Имея в виду все эти замечания и перейдя от интегрирования по  $k_z$  к интегрированию по  $\vartheta$ , для интенсивности излучения в волновой зоне получим следующее выражение:

$$I_{n \neq 0} = \sum_{n=1}^{\infty} \int \frac{dI_n}{d\Omega} d\Omega, \quad \frac{dI_n}{d\Omega} = \frac{2q^2 c}{\pi^3 \rho_1^2 \varepsilon_1^{3/2}} \frac{J_n^2(nu)}{|W_\varepsilon(J_0, H_0)|^2 |1 - \beta_1 \cos \vartheta| \cos^2 \vartheta}, \quad (28)$$

где  $d\Omega = 2\pi \sin \vartheta d\vartheta d\phi$  — элемент телесного угла и введено обозначение

$$u = \frac{\omega_0 z_0}{c} \sqrt{\varepsilon_1} \frac{\cos \vartheta}{|1 - \beta_1 \cos \vartheta|}. \quad (29)$$

Таким образом, полную интенсивность излучения осциллятора, движущегося по оси диэлектрического цилиндра, можно записать в виде  $I = I_{n=0} + I_{n \neq 0}$ , где первое слагаемое дается формулой (20) и описывает излучение с непрерывным спектром, распространяющееся под черенковским углом внешней среды, если выполнено условие  $\beta_1 > 1$ , и отсутствующее при  $\beta_1 < 1$ . Второе же слагаемое описывает излучение, которое при заданном угле  $\vartheta$  обладает дискретным спектром, определяемым формулой (26). С учетом дисперсии диэлектрической проницаемости это слагаемое не дает вклада в излучение под черенковским углом. Это связано с тем, что при приближении  $\vartheta$  к  $\vartheta_0$  частота стремится к бесконечности и, следовательно, начиная с определенной частоты условие Черенкова перестает выполняться. Углы, для которых учет дисперсии необходим, неявным образом определяются из условия  $\omega_n \geq \omega_d$  с учетом формулы (26) и частотной зависимости проницаемости  $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\omega_n)$ , где  $\omega_d$  — характерная частота дисперсии.

Подставляя в (28)  $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$ , можно найти интенсивность излучения осциллятора, движущегося в однородной среде со скоростью  $v_0$ :

$$I_{n \neq 0}^{(0)} = \sum_{n=1}^{\infty} \int \frac{dI_n^{(0)}}{d\Omega} d\Omega, \quad \frac{dI_n^{(0)}}{d\Omega} = \frac{q^2 n^2 \omega_0^2}{2\pi c \varepsilon_1^{1/2}} \frac{\operatorname{tg}^2 \vartheta}{|1 - \beta_1 \cos \vartheta|^3} J_n^2(nu). \quad (30)$$

Эту формулу при  $\varepsilon_1 = 1$  можно получить из общей формулы для излучения четырехмерного гармонического осциллятора, приведенной, например, в монографии [12]. Отметим, что в формуле (2.7) этой книги имеется опечатка: пропущен множитель  $n^2$ . Для неподвижного гармонического осциллятора в вакууме, когда  $\beta_1 = 0$ ,  $\varepsilon_1 = 1$ , из (30) получается формула, которая приведена, например, в [16].

Из формул (28) и (30) видно, что при  $\vartheta = \pi/2$  интенсивность излучения как в однородной, так и в неоднородной средах отлична от нуля только на основной гармонике  $n=1$ . Из этих же формул следует, что для заданной гармоники  $n$  соответствующие интенсивности обращаются в нуль при углах, определяемых из уравнения  $u = j_{n,l}/n$ ,  $l=1,2,\dots$ , где  $j_{n,l}$  — нули функции Бесселя:  $J_n(j_{n,l}) = 0$ . Если условие Черенкова во внешней среде для максимальной скорости заряда не выполнено, то  $u < 1$  и из  $j_{n,l} > n$  следует, что это уравнение не имеет решений. Если же это условие выполнено, то интенсивность излучения на данной гармонике  $n$  обращается в нуль при углах  $\vartheta_{n,l}$ , определяемых из формулы

$$\cos \vartheta_{n,l} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_1} (v_0 \pm n\omega_0 z_0 / j_{n,l})}, \quad (31)$$

где верхний (нижний) знак соответствует значениям углов  $\cos \vartheta < (>) 1/\beta_1$ . Эти углы не зависят от диэлектрической проницаемости цилиндра.

Перейдем теперь к анализу формулы (30). Рассмотрим сначала случай, когда условие Черенкова не выполняется для максимальной скорости заряда  $(v_0 + \omega_0 z_0)\sqrt{\varepsilon_1}/c < 1$ , когда  $|u| < 1$ . Если пренебречь дисперсией, то ряд по  $n$  в (30) суммируется с помощью стандартной формулы [16]

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 J_n^2(nu) = \frac{u^2(u^2 + 4)}{16(1 - u^2)^{7/2}}, \quad (32)$$

и из (30) для углового распределения интенсивности излучения получим

$$\frac{dI^{(0)}}{d\vartheta} = \frac{q^2 \omega_0^2}{16c \varepsilon_1^{1/2}} \frac{\operatorname{tg}^2 \vartheta \sin \vartheta}{|1 - \beta_1 \cos \vartheta|^3} \frac{u^2(u^2 + 4)}{(1 - u^2)^{7/2}}. \quad (33)$$

Если же  $(v_0 + \omega_0 z_0)\sqrt{\varepsilon_1} > c$ , то существует область значений  $\vartheta$ , в которой  $|u| > 1$ , и при пренебрежении дисперсией ряд (30) расходится. Таким образом, в этом случае, чтобы получить конечный результат для интенсивности излучения, учет дисперсии необходим. Заметим, что здесь ситуация аналогична случаю обычного черенковского излучения.



Перейдем теперь к анализу формулы для интенсивности излучения в случае неоднородной среды, когда  $\varepsilon_0 \neq \varepsilon_1$ . Прежде всего заметим, что с учетом формулы (30) для излучения в однородной среде с проницаемостью  $\varepsilon_1$  выражение (28) для интенсивности излучения при наличии диэлектрического цилиндра можно записать в виде

$$\frac{dI_n}{d\Omega} = \frac{dI_n^{(0)}}{d\Omega} F_n(\vartheta), \quad (34)$$

где фактор неоднородности дается формулой

$$F_n(\vartheta) = \frac{4c^2 |W_\varepsilon(J_0, H_0)|^{-2}}{\pi^2 \rho_1^2 \varepsilon_1 \omega_n^2 \sin^2 \vartheta}. \quad (35)$$

Рассмотрим зависимость интенсивности излучения от радиуса цилиндра в пределе  $|\lambda_j| \rho_1 \gg 1$ , когда длина излученной волны намного меньше радиуса цилиндра. Воспользовавшись асимптотическими выражениями для цилиндрических функций при больших значениях аргумента, с учетом формул (27) для фактора неоднородности получим

$$F_n(\vartheta) = \frac{2\sqrt{\varepsilon_0/\varepsilon_1 - \cos^2 \vartheta}}{\sin \vartheta} \left[ 1 + \frac{\varepsilon_0^2 \sin^2 \vartheta}{\varepsilon_1^2 (\varepsilon_0/\varepsilon_1 - \cos^2 \vartheta)} + \left( 1 - \frac{\varepsilon_0^2 \sin^2 \vartheta}{\varepsilon_1^2 (\varepsilon_0/\varepsilon_1 - \cos^2 \vartheta)} \right) \sin(2|\lambda_0| \rho_1) \right]^{-1} \quad (36)$$

при  $\cos^2 \vartheta < \varepsilon_0/\varepsilon_1$  ( $\lambda_0^2 > 0$ ) и

$$F_n(\vartheta) = \frac{4\sqrt{\cos^2 \vartheta - \varepsilon_0/\varepsilon_1}}{\sin \vartheta} e^{-2|\lambda_0| \rho_1} \left[ 1 + \frac{\varepsilon_0^2 \sin^2 \vartheta}{\varepsilon_1^2 (\cos^2 \vartheta - \varepsilon_0/\varepsilon_1)} \right]^{-1} \quad (37)$$

при  $\cos^2 \vartheta > \varepsilon_0/\varepsilon_1$  ( $\lambda_0^2 < 0$ ). Как видно, во втором случае интенсивность излучения экспоненциально уменьшается с ростом  $\rho_1$ . Это обусловлено тем, что при  $\varepsilon_0/\varepsilon_1 < 1$  угол  $\arccos \sqrt{\varepsilon_0/\varepsilon_1}$  соответствует углу полного внутреннего отражения и лучи, падающие изнутри на поверхность цилиндра, не могут распространяться под углами  $\cos^2 \vartheta < \varepsilon_0/\varepsilon_1$  во внешней среде.

Когда длина излученной волны намного больше радиуса цилиндра,  $\lambda_j \rho_1 \ll 1$ , то, воспользовавшись асимптотическими выражениями для цилиндрических функций, нетрудно показать, что из (28) в ведущем порядке получается интенсивность излучения в однородной среде с проницаемостью  $\varepsilon_1$  (формула (30)), т. е.  $F_n(\vartheta) \rightarrow 1$ . В пределе малых скоростей колебательного движения  $\omega_0 z_0 \ll c$  интенсивность излучения на заданной гармонике под углами, отличными от черенковского, стремится к нулю как  $(\omega_0 z_0 / c)^{2n}$ .

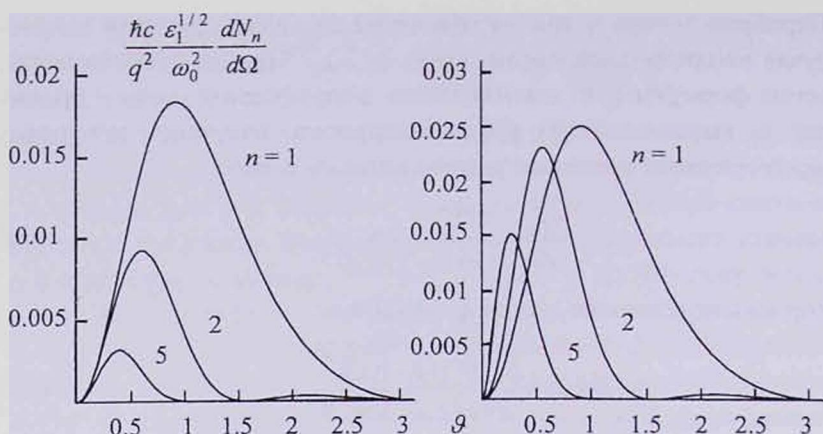


Рис.1. Зависимость числа излученных квантов от угла  $\vartheta$  между импульсом фотона и осью цилиндра для гармоник  $n = 1, 2, 5$  при  $\varepsilon_0 / \varepsilon_1 = 1$  (левый рисунок, однородная среда) и  $\varepsilon_0 / \varepsilon_1 = 3$  (правый рисунок). Расчеты проводились для  $v_0 \sqrt{\varepsilon_1} / c = 0.4$  и  $\omega_0 z_0 \sqrt{\varepsilon_1} / c = 0.5$ , когда для максимальной скорости заряда условие Черенкова во внешней среде не выполняется.

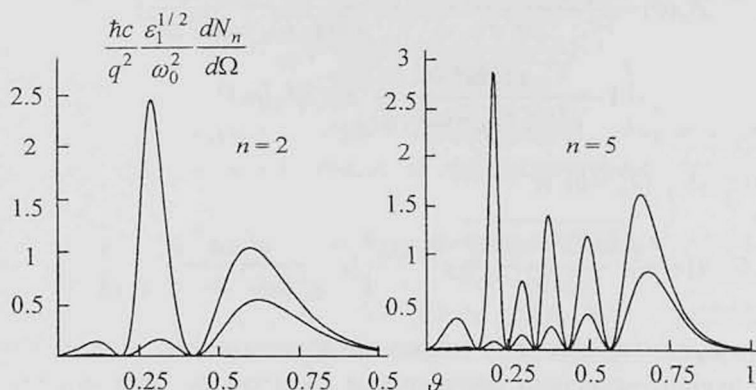


Рис.2. То же, что и на рис.1 для гармоник  $n = 2$  (левый рисунок) и  $n = 5$  (правый рисунок) при  $v_0 \sqrt{\varepsilon_1} / c = 0.9$ ,  $\omega_0 z_0 \sqrt{\varepsilon_1} / c = 0.5$ , когда для максимальной скорости заряда условие Черенкова выполнено. Нижние кривые соответствуют случаю однородной среды  $\varepsilon_0 / \varepsilon_1 = 1$ , а верхние – значению  $\varepsilon_0 / \varepsilon_1 = 3$ .

Нами были проведены численные расчеты для углового распределения плотности числа квантов  $dN_n / d\Omega = (1 / \hbar \omega_n) dI_n / d\Omega$  для ряда значений номера гармоники  $n$ . На рис.1 приведены результаты этих расчетов для излучения осциллятора в однородной среде  $\varepsilon_0 = \varepsilon_1$  (левый рисунок) и при  $\varepsilon_0 / \varepsilon_1 = 3$  (правый рисунок). Рассмотрен случай, когда для максимальной скорости заряда условие Черенкова для внешней среды не вы-



полняется. Для однородной среды в спектре излучения для всех значений углов доминирует основная гармоника. В неоднородной среде интенсивность излучения увеличивается и при малых углах доминируют высшие гармоники. На рис.2 приведены те же самые зависимости для гармоник  $n=2$  (левый рисунок) и  $n=5$  (правый рисунок), когда для максимальной скорости заряда условие Черенкова во внешней среде выполняется, а для поступательной – нет. Видно, что неоднородность может существенно увеличить интенсивность излучения по сравнению с однородной средой. Видно также, что число излученных квантов обращается в нуль при углах, определяемых формулой (31). Число этих нулей увеличивается с ростом номера гармоники. Отметим, что теперь излучение намного сильнее по сравнению со случаем рис.1, а излучение в основном направлено вперед. И наконец, на рис.3 приведены графики для угловой плотности числа квантов, когда условие Черенкова выполняется для поступательной скорости осциллятора. Верхняя/нижняя кривая соответствует случаю неоднородной/однородной среды. Интенсивность излучения сильно осциллирует вблизи черенковского угла  $\vartheta_0$ . С приближением к этому углу, согласно (26), частота кванта увеличивается, и уже важными становятся эффекты, связанные с дисперсией диэлектрической проницаемости внешней среды.

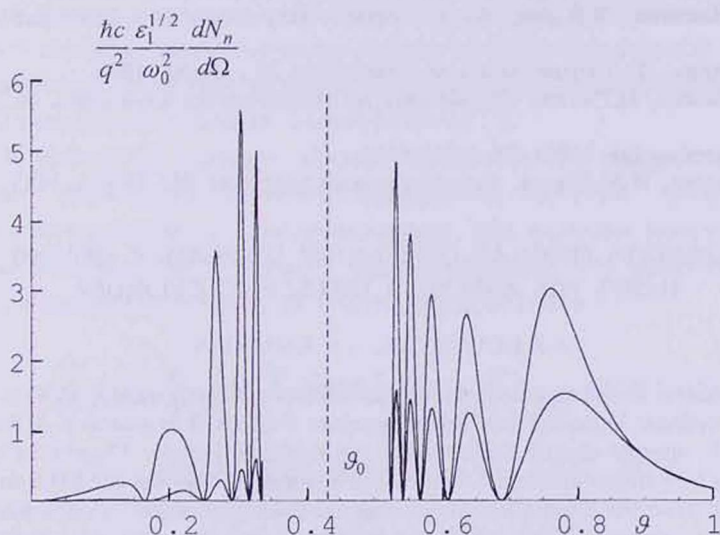


Рис.3. То же самое, что и на рис.2 при  $n=2$ ,  $v_0 \sqrt{\epsilon_1}/c=1.1$  и  $\omega_0 z_0 \sqrt{\epsilon_1}/c=0.5$ , когда условие Черенкова выполняется для поступательной скорости осциллятора. Здесь  $\vartheta_0 \approx 0.43$  – соответствующий черенковский угол. Как и на рис.2, нижняя кривая соответствует случаю однородной среды, а верхняя – значению  $\epsilon_0/\epsilon_1=3$ .

Авторы выражают благодарность Л.Ш.Григоряну за постановку задачи и ценные обсуждения, а также С.Р.Арзуманян и Г.Ф.Хачатряну за постоянный интерес к работе и многочисленные стимулирующие обсуждения.

Работа выполнена в рамках гранта №1361 Министерства образования и науки РА.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Л.Ш.Григорян, А.С.Котанджян, А.А.Саарян. Изв. НАН Армении, Физика, **30**, 239 (1995).
2. А.С.Котанджян, Г.Ф.Хачатрян, А.В.Петросян, А.А.Саарян. Изв. НАН Армении, Физика, **35**, 115 (2000).
3. А.С.Котанджян, А.А.Саарян. Изв. НАН Армении, Физика, **36**, 310 (2001).
4. A.S.Kotanyan. Radiation from a charged particle rotating inside a dielectric cylinder. V International Symposium RREPS'01, 9-14 September 2001, Lake Aya, Altai Mountains, Russia, p.63.
5. Л.Ш.Григорян, Г.Ф.Хачатрян, С.Р.Арзуманян. Известия НАН Армении, Физика, **33**, 267 (1998); cond. mat/0001322.
6. L.Sh.Grigroryan, H.F.Khachatryan, P.F.Kazaryan. Proceedings of LS-8, Greifswald, Germany, 30.08-03.09, 1998, p.396.
7. Б.В.Хачатрян. Изв. вузов, Радиофизика, **6**, 904 (1963).
8. Ф.А.Костанян, О.С.Мергелян. Изв. АН Арм. ССР, Физика, **6**, 481 (1971).
9. Ф.А.Костанян, О.С.Мергелян. Изв. АН Арм. ССР, Физика, **6**, 472 (1971).
10. А.Б.Куканов, Эль Хедер Сулейман. Изв. вузов, Физика, **11**, 291 (1975).
11. Ф.А.Костанян, О.С.Мергелян. Изв. АН Арм. ССР, Физика, **12**, 179 (1977).
12. М.М.Никитин, В.Я.Эпп. Ондюляторное излучение, М., Энергоатомиздат, 1988.
13. И.М.Франк. Излучение Вавилова-Черенкова. М., Наука, 1988.
14. М.Абрамовиц, И.Стиган. Справочник по специальным функциям. М., Наука, 1979.
15. Б.М.Болотовский. УФН, **75**, 295 (1961).
16. А.А.Соколов, И.М.Тернов. Релятивистский электрон. М., Наука, 1983.

## RADIATION FROM AN OSCILLATOR UNIFORMLY MOVING ALONG THE AXIS OF A DIELECTRIC CYLINDER

A.S. KOTANYAN, A.A. SAHARIAN

The radiation from a longitudinal charged oscillator uniformly moving along the axis of a dielectric cylinder immersed into a homogeneous medium is considered. A formula is derived for the spectral-angular distribution of this radiation intensity. Under the Cherenkov condition for the exterior medium it contains two summands. The first one has a continuous spectrum and describes a radiation going along the Cherenkov angle corresponding to the exterior media. The second one describes a radiation which has a discrete spectrum for a given angle. The frequencies of the radiation quanta are multiple to the oscillator frequency, taking into account the Doppler effect. The results of numerical calculations are presented for the angular distribution of the radiated quanta and they are compared with the corresponding results for an oscillator moving in a homogeneous medium. It is shown that the presence of the cylinder can essentially increase the radiation intensity.