

КВАНТОВОЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ СВЯЗИ

Т.К. МЕЛИК-БАРХУДАРОВ

АОЗТ "Лазерная техника", Ереван

(Поступила в редакцию 18 июля 2001 г.)

В рамках квантовой электродинамики найдена пропускная способность канала связи, в котором источник информации моделируется классическим током, а в качестве детектора используется металлический слой, в котором падающее излучение возбуждает ток.

Основы современной теории связи были заложены Шенноном [1], предложившим простую математическую модель связи, в которой процесс связи рассматривался как стохастический по своей природе. Шеннон связал количество информации, содержащееся в сообщении, с его вероятностью. Другими словами, чем больше неопределенность, снимаемая сообщением, тем больше информация, получаемая нами при его приеме. Вероятностный подход Шеннона оказался исключительно плодотворным и привел к созданию отдельного раздела прикладной теории вероятностей – теории информации, нашедшей применение в многочисленных областях человеческого знания. Вместе с тем очевидно, что только методами теории вероятностей проблему передачи информации невозможно решить. Мы имеем дело прежде всего с задачей распространения излучения, которая должна рассматриваться в рамках квантовой электродинамики. В частности, только квантовая теория позволяет последовательно описать шумы, ограничивающие скорость передачи информации.

Сформулируем задачу связи. Предположим, что задан функционал $\rho[I(x)]$, описывающий распределение некоторой величины $I(x)$, характеризующей источник информации. Тогда с помощью $\rho[I(x)]$ и функционала условного распределения выходного сигнала при заданном входном $\rho[j(x)|I(x)]$, можно найти функционал совместного распределения величин $j(x)$ и $I(x)$:

$$\rho[j(x), I(x)] = \rho[I(x)] \rho[j(x)|I(x)]. \quad (1)$$

Суммируя по всем конфигурациям $I(x)$, получим функционал распределения $j(x)$

$$\rho[j(x)] = \int \rho[I(x)] \rho[j(x)|I(x)] DI(x). \quad (2)$$

Следуя Шеннону, в качестве меры информации, содержащейся в сигнале $j(x)$, относительно сигнала $I(x)$ используется величина [1]

$$I = \int \rho[j(x), I(x)] \ln \frac{\rho[j(x), I(x)]}{\rho[j(x)] \rho[I(x)]} Dj(x) DI(x), \quad (3)$$

характеризующая статистическую зависимость $j(x)$ и $I(x)$. В случае статистически независимых сигналов $j(x)$ и $I(x)$, т. е. когда ни один из сигналов не содержит информацию о другом, величина I равна нулю. В случае, когда входной сигнал состоит из двух независимых сигналов, т.е. $I(x) = I_1(x) + I_2(x)$, информация в выходном сигнале равна сумме информации, полученных от каждого входного сигнала. Информация I может быть переписана следующим образом:

$$I = H_s - H_{s|r}, \quad (4)$$

где H_s и $H_{s|r}$ определены соотношениями

$$H_s = - \int \rho[I(x)] \ln \rho[I(x)] DI(x), \quad (5)$$

$$H_{s|r} = - \int \rho[I(x)|j(x)] \ln \rho[I(x)|j(x)] Dj(x) DI(x). \quad (6)$$

В свою очередь, $\rho[I(x)|j(x)]$ следует из соотношения

$$\rho[I(x)] \rho[j(x)|I(x)] = \rho[j(x)] \rho[I(x)|j(x)]. \quad (7)$$

Средняя полученная информация I может быть интерпретирована как разность между переданной информацией H_s и информацией, потерянной в канале, $H_{s|r}$. В качестве начального распределения $\rho[I(x)]$ выбирается гауссово с заданной функцией корреляции $(I^2)(x-x')$. В соответствии с шенноновской теорией такой источник обеспечивает максимальную скорость производства информации при заданной плотности интенсивности сигнала. Нам же остается методами квантовой теории поля вычислить величину $\rho[j(x)|I(x)]$.

Мы исходим из выражения для производящего функционала системы [2]

$$e^{-iW/\hbar} = \langle T e^{\frac{i}{\hbar} \int L_{\text{int}} dt} \rangle, \quad (8)$$

где L_{int} – лагранжиан максвелловского и дираковского полей, взаимодействующих друг с другом и с заданными внешними источниками:

$$L_{\text{int}} = -\frac{1}{c^2} \int (j^\lambda A_\lambda + I^\lambda A_\lambda + j^\lambda A_\lambda) d^4x, \quad (9)$$

где A_λ – векторный потенциал, j^λ – дираковский ток, $\bar{\psi}$ – дираковский сопряженный ψ . Интегрирование по времени проводится сначала от t_{initial} до t_{final} и затем в обратном порядке от t_{final} до t_{initial} . Другими словами, контур интегрирования C состоит из двух линий C^+ и C^- , примыкающих к временной оси. Значения источников предполагаются различными на верхнем и нижнем контурах, так что, например, $A^{(+)} = A(t^+)$, $A^{(-)} = A(t^-)$, где t^+ и t^- – значения временной переменной на C^+ и C^- . Символ T означает операцию хронологического упорядочения полевых операторов вдоль контура C . Усреднение в (8) производится по начальному состоянию системы, в качестве которого выбирается каноническое распределение. Производящий функционал зависит, вообще говоря, от двойной совокупности источников, скажем $A_\lambda^{(\pm)}$, а в качестве его независимых переменных выбираются их симметричные и антисимметричные комбинации, а именно, $A_s = 1/2(A^{(-)} + A^{(+)})$ и $A_a = A^{(-)} - A^{(+)}$. Дифференцируя W по A_s и A_a и полагая затем антисимметричные комбинации источников равными нулю, получим

$$c^2 \left(\frac{\delta W}{\delta A_\alpha^\lambda} \right)_{A_a \rightarrow 0} = \langle j_\lambda \rangle, \quad (10)$$

$$c \left(\frac{\delta^2 W}{\delta A_\alpha^\lambda(x_1) \delta A_\alpha^\mu(x_2)} \right)_{A_a \rightarrow 0} = \frac{1}{2} \Pi_{\lambda,\mu}^K(x_1, x_2), \quad (11)$$

где

$$i\hbar c^3 \Pi_{\lambda,\mu}^K(x_1, x_2) = \langle j_\lambda(x_1) j_\mu(x_2) + j_\mu(x_2) j_\lambda(x_1) \rangle - 2 \langle j_\lambda(x_1) \rangle \langle j_\mu(x_2) \rangle. \quad (12)$$

Поскольку гейзенберговские операторы плотности тока, относящиеся к различным пространственно-временным точкам, не коммутируют между собой, квантовые функции корреляции определяются как средние от симметричных комбинаций произведений операторов. Непосредственное вычисление производящего функционала может быть произведено разложением экспоненты в (8) с последующим использованием теоремы Вика для среднего по каноническому распределению от произведения произвольного числа полевых операторов. Ряд теории возмущений для производящего функционала имеет тот же вид, что и соответствующий ряд в задаче рассеяния квантовой теории поля с заменой фейнмановских пропагаторов величинами

$$G = \begin{pmatrix} 0 & G^A \\ G^R & G^K \end{pmatrix}, \quad (13)$$

где G^K , G^R и G^A – кинетическая, запаздывающая и опережающая функции Грина свободного дираковского поля, определяемые соотно-

шениями

$$ihcG^K(x_1x_2) = \langle [\psi(x_1), \bar{\psi}(x_2)]_- \rangle, \quad (14)$$

$$ihcG^R(x_1x_2) = \Theta(t_1 - t_2) \langle [\psi(x_1), \bar{\psi}(x_2)]_+ \rangle, \quad (15)$$

$$ihcG^R(x_1x_2) = -\Theta(t_2 - t_1) \langle [\psi(x_1), \bar{\psi}(x_2)]_+ \rangle, \quad (16)$$

и

$$D = \begin{pmatrix} 0 & D^A \\ D^R & D^K \end{pmatrix}, \quad (17)$$

где функции Грина свободного максвелловского поля определяются аналогичными соотношениями с заменой коммутаторов антикоммутаторами и наоборот. Переход от операторного к формализму функционального интегрирования совершается с помощью процедуры, изложенной в [3]. В итоге выражение для производящего функционала через фейнмановский интеграл по конфигурациям полей представляется в виде

$$e^{-iW/\hbar} = \int \exp\left(\frac{i}{\hbar} S\right) DAD\psi D\bar{\psi} \left(\int \exp\left(\frac{i}{\hbar} S_0\right) DAD\psi D\bar{\psi} \right)^{-1}, \quad (18)$$

где S – действие взаимодействующей системы, а S_0 – действие свободных полей. Мы приходим к функциональной формулировке техники Келдыша [4]. Интегрируя по дираковскому полю, получим с точностью до квадратичных по максвелловскому полю членов следующее выражение для производящего функционала:

$$e^{-iW/\hbar} = \int e^{\frac{i}{\hbar} [A_\lambda \frac{(D^{-1})^{1\mu}}{2} A_\mu - \frac{1}{c} J^\lambda A_\lambda - \frac{1}{2} (A + \Lambda) P (A + \Lambda)]} DA \left(\int e^{\frac{i}{2\hbar} A_\lambda (D^{-1})^{1\mu} A_\mu} DA \right)^{-1}, \quad (19)$$

где

$$P = \begin{pmatrix} P^K & P^R \\ P^A & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_{\lambda\mu}^K(x-x') = -\frac{ie^2\hbar c}{2} \text{tr} \left(\gamma_\lambda G^A(x-x') \gamma_\mu G^R(x'-x) + \gamma_\lambda G^R(x-x') \gamma_\mu G^A(x'-x) + \right. \\ \left. + \gamma_\lambda G^K(x-x') \gamma_\mu G^K(x'-x) \right), \quad (20)$$

$$P_{\lambda\mu}^R(x-x') = -\frac{ie^2\hbar c}{2} \text{tr} \left(\gamma_\lambda G^R(x-x') \gamma_\mu G^K(x'-x) + \gamma_\lambda G^K(x-x') \gamma_\mu G^A(x'-x) \right), \quad (21)$$

$$P_{\lambda\mu}^A(x-x') = -\frac{ie^2\hbar c}{2} \text{tr} \left(\gamma_\lambda G^A(x-x') \gamma_\mu G^K(x'-x) + \gamma_\lambda G^K(x-x') \gamma_\mu G^R(x'-x) \right), \quad (22)$$

γ_μ – матрицы Дирака, а G^K , G^R и G^A – функции Грина дираковского

поля, определяемые формулами (14-16). Поскольку интеграл (19) гауссов, вычисление его проводится немедленно и мы получаем для производящего функционала системы W

$$W[A] = \frac{1}{2c} \left[A P A + \frac{1}{c} (A P D I + I D P A) \right], \quad (23)$$

где P – собственная энергия максвелловского поля, определяемая из уравнения

$$P = P + P D P, \quad (24)$$

В свою очередь, гриновские функции взаимодействующего максвелловского поля D удовлетворяют уравнению Дайсона

$$D^{-1} = D^{-1} - P. \quad (25)$$

Переписывая (23) в компонентах, получим для производящего функционала следующее выражение:

$$W = \frac{1}{2c} \left[\frac{1}{4} A_a P^K A_a + \frac{1}{c} \langle j \rangle A_a \right], \quad (26)$$

где среднее значение плотности тока

$$\langle j \rangle = P^R (c A_s + D^R I). \quad (27)$$

Как мы отметили ранее, дифференцирование производящего функционала A_a в пределе $A_a \rightarrow 0$ дает квантовые корреляционные функции произвольного порядка. Другими словами, производящий функционал W может быть представлен в форме

$$e^{-iW/\hbar} = \int e^{\frac{i}{c^2 \hbar} \int j^4(x) A_a(x) d^4x} \rho[j(x) I(x)] D j(x), \quad (28)$$

где $\rho[j(x) I(x)]$ может рассматриваться как условный функционал распределения плотности тока на выходе системы при входной плотности тока. Так как $W[0] = 0$, то функционал $\rho[j(x) I(x)]$ нормализован, как и должно быть, на единицу. Корреляционные функции n -го порядка определяются интегралом

$$\int j(x_1) j(x_2) \dots j(x_n) \rho[j(x) I(x)] D j(x). \quad (29)$$

Очевидно, условный функционал распределения может быть получен посредством фурье-преобразования $e^{-iW/\hbar}$, т. е.

$$\rho[j(x) I(x)] = \int e^{\frac{i}{c^2 \hbar} \int j^4(x) A_a(x) d^4x} e^{-iW/\hbar} D A_a(x). \quad (30)$$

Подставляя W из (26), мы получим после интегрирования

$$\rho[j(x)|I(x)] = \exp\left[-\frac{1}{2} \int dx^4 dx'^4 (j(x) - \langle j(x) \rangle)(f^2)^{-1}(x-x')(j(x') - \langle j(x') \rangle)\right], \quad (31)$$

$$(f^2)(x-x') = \frac{i\hbar c^3}{2} \Pi^K(x-x'). \quad (32)$$

Как уже упоминалось, мы выбираем функционал распределения плотности тока на входе системы $\rho[I(x)]$ в виде

$$\rho[I(x)] = \exp\left[-\frac{1}{2} \int I(x)(I^2)^{-1}(x-x')I(x')dx^4 dx'^4\right] \quad (33)$$

с заданной функцией корреляции $(I^2)(x-x')$. В итоге мы получаем с помощью соотношения (2) следующее выражение для функционала распределения плотности тока на выходе системы:

$$\rho[j(x)] = \exp\left[-\frac{1}{2} \int j(x)(j^2)^{-1}(x-x')j(x')dx^4 dx'^4\right], \quad (34)$$

где

$$(j^2) = (f^2) + (j')^2, \quad (35)$$

а усредненный по начальному распределению $\rho[I(x)]$ квадрат плотности тока на выходе системы

$$(j')^2 = \Pi^R D^R (I^2) D^A \Pi^A. \quad (36)$$

С помощью формул (24), (26) и (27) мы получим для информации, переданной по каналу связи, следующее выражение:

$$I = \frac{1}{2} \sum_q \ln \left(1 + \frac{(j_q)^2}{(f^2)_q} \right), \quad (37)$$

где $(f^2)_q$ и j_q — соответствующие Фурье-компоненты $j(x) = \sum_q j_q e^{-iqx}$.

До сих пор, говоря о поле материи, мы называли его дираковским, имея в виду его релятивистский характер. В реальных же коммуникационных системах реализуется нерелятивистский предел. Разлагая действие S в ряд по $1/c$, получим в экспоненте подынтегрального выражения члены, пропорциональные c^2 , которые и выделяют в приближении стационарной фазы нерелятивистские конфигурации электронного поля.

Мы ограничимся случаем простейшей приемной системы, а именно, проводящим слоем, в котором падающее излучение возбуждает

ток, а основным источником шума является рассеяние электронов хаотически расположенными неоднородностями решетки. В такой системе необходимо провести усреднение поляризационного оператора по положениям рассеивающих центров. Техника такого усреднения изложена в работе [5], где была найдена запаздывающая часть поляризационного оператора, определяющая проводимость системы. Для наших целей нам необходима также кинетическая часть. Мы ограничимся также случаем, когда длина волны излучения много больше глубины его проникновения $\delta = c\sqrt{2/\omega\sigma}$.

Выпишем для пропускной способности канала связи $C = I/T$, где T – продолжительность связи, выражение

$$C = \frac{1}{4\pi} \int \ln \left(1 + \frac{(J)_{\omega}^2}{(f^2)_{\omega}} \right) d\omega, \quad (38)$$

где $(J)^2$ – усредненный по $\rho[I(x)]$ квадрат выходного тока. Представим соотношение сигнал/шум в виде

$$\frac{(J)_{\omega}^2}{(f^2)_{\omega}} = \frac{(I)_{\omega}^2}{(F^2)_{\omega}}, \quad (39)$$

где

$$\begin{aligned} (F^2)_{\omega} = \hbar c^3 \left| 1 + i \frac{\omega}{cs} \coth sd \right|^2 e^{i(s-s^*)} & \left\{ i P^K \left(\frac{\sin(s+s^*)d}{s+s^*} + \frac{\sin(s-s^*)d}{s-s^*} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{2c|s|^2}{\omega} [\cos(s-s^*)d - \cos(s+s^*)d] \coth \frac{\hbar\omega}{2kT} \right\}. \end{aligned} \quad (40)$$

При толщине слоя $d \ll \delta$ мы имеем

$$(F^2)_{\omega} = 4\hbar\omega c^2 \coth \frac{\hbar\omega}{2kT} \left(1 + \frac{c}{\sigma d} \right) \left(1 + \frac{\sigma d}{c} \right)^2. \quad (41)$$

Максимальное значение сигнал/шум имеет место при $d = c/2\sigma$, а соответствующая формула при $d \gg \delta$ имеет вид

$$(F^2)_{\omega} = \hbar c^2 \sigma \coth \frac{\hbar\omega}{2kT}. \quad (42)$$

Отсюда видно, что при $\hbar\omega \ll kT$ интенсивность шумов возрастает как $1/\omega$, т.е. формула (42) описывает так называемый Фликкер-шум.

ЛИТЕРАТУРА

1. C.E.Shannon. Bell System Technical Journal, 27, 379 and 623 (1948).
2. T.K.Melik-Barkhudarov and L.L.Minasian. J. Phys. B, 27, 1257 (1994).

3. П.Рамон. Теория поля. Современный вводный курс. М., Мир, 1984.
4. Л.В.Келдыш. ЖЭТФ, 20, 1018 (1965).
5. А.А.Абрикосов, Л.П.Горьков, И. Е. Дзялошинский. Методы квантовой теории поля в статистической физике. М., Наука, 1965.

ԿԱՊԻ ԲՎԱՆՏԱԷԼԵԿՏՐԱԴԻՆԱՄԻԿԱԿԱՆ ՏԵՄԻՅՈՒՆ

Թ.Կ. ՄԵԼԻԿ-ԲԱՐԽՈՒԴԱՐՈՎ

Քվանտային էլեկտրադինամիկայի շրջանակներում հաշվված է կապի գծի թողունակությունը այն դեպքում, երբ ինֆորմացիայի աղբյուր է հանդիսանում դասական հոսանքը, իսկ ընդունիչն է մետաղական շերտը, որում ընկնող ճառագայթումը գրգռում է հոսանքը:

QUANTUM ELECTRODYNAMIC THEORY OF COMMUNICATION

T. K. MELIK-BARKHUDAROV

The transmission capacity of a communication channel with a classical current as a source of information, and a metallic layer as a detector is obtained in the framework of quantum electrodynamics.