Известия НАН Армении, Физика, т.36, №6, с.321-325 (2001)

УДК 537.87

О СИЛАХ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА ИЗЛУЧАЮЩИЙ ЗАРЯД

Б.В. ХАЧАТРЯН

Ереванский государственный университет

(Поступила в редакцию 18 октября 2000 г.)

Показано, что сила реакции излучения обусловлена двумя причинами – обменом импульса между излучающим зарядом и электромагнитным полем излучения, а также между зарядом и полем, сопровождающим заряд.

Хорошо известно, что заряженная частица, движущаяся с ускорением, излучает, вследствие чего на нее действует дополнительная сила (помимо внешней силы $\mathbf{F}_0$) – сила реакции излучения. В данной работе показывается, что эта сила (будем называть ее силой самодействия или просто самодействием) складывается из двух частей: первая сила обусловлена обменом импульса между частицей и полями излучения, т.е. теми полями, которые уходят в бесконечность, а во ~~второй~~ силе в обмене импульса участвуют также и поля, сопровождающие заряд и не уходящие на бесконечность, т.е. имеющие на бесконечности нулевой поток энергии (подробнее см. дальше).

Будем исходить из закона сохранения импульса для системы заряд плюс электромагнитное поле [1,2]:

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{P}+\frac{1}{4\pi c}\int_V[\mathbf{EH}]dV\right)=\frac{1}{4\pi}\oint_S\left\{\mathbf{E}(\mathbf{nE})+\mathbf{H}(\mathbf{nH})-\frac{E^2+H^2}{2}\mathbf{n}\right\}dS\,, \qquad (1)$$

где $\mathbf{P}$ – импульс частицы, $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ – векторы напряженностей электромагнитного поля, $\mathbf{n}$ – единичный вектор нормали к поверхности S, охватывающей объем V. В правой части формулы (1) опущена (и в дальнейшем будем опускать) внешняя сила $\mathbf{F}_0$. Как видно из (1), на частицу помимо внешней, действуют еще две силы: сила $\mathbf{f}_1$, выражающаяся поверхностным интегралом, и сила $\mathbf{f}_2$, выражающаяся объемным интегралом.

В качестве поверхности S выберем сферу большого радиуса $R\to\infty$, с центром в точке мгновенного нахождения заряда. Тогда $\mathbf{n}=\mathbf{R}/R$, а для $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ воспользуемся известными выражениями полей, создаваемых заряженной частицей, движущейся с произвольной скоростью $\mathbf{v}(t)$ [2,3]:

$$\mathbf{H} = [\mathbf{nE}], \quad \mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \frac{e(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta})}{\gamma^2 R^2 x^3} + \frac{e}{cRx^3}\left[\mathbf{n}\left[\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta},\dot{\boldsymbol{\beta}}\right]\right], \tag{2}$$

где $c\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}$, $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$, $x = 1 - \mathbf{n}\boldsymbol{\beta}$, $\dot{\boldsymbol{\beta}} \equiv d\boldsymbol{\beta}/dt$. Заметим, что все величины в правой стороне уравнения (2) берутся в момент времени $t' = t - R(t')/c$.

При вычислении силы $\mathbf{f}_1$ мы должны в (1) подставить только член с более низкой степенью R^{-1} (второй член справа в (2)), соответствующий сферическим электромагнитным полям, уходящим в бесконечность, т.е. полям излучения. Тогда, учитывая также замечание в абзаце после формулы (2), $\mathbf{f}_1$ можно записать в виде

$$\mathbf{f}_1 = -\oint_S \frac{E^2}{4\pi}\mathbf{n}dS = -\oint \mathbf{n}\frac{dI_n}{c}, \tag{3}$$

где dI_n – энергия, излученная в единицу времени в элементе телесного угла $d\Omega$ в произвольном направлении $\mathbf{n}$ [3]:

$$dI_n = \frac{e^2}{4\pi c x^3}\left\{\dot{\beta}^2 + \frac{2}{x}\left(\mathbf{n}\dot{\boldsymbol{\beta}}\right)\left(\boldsymbol{\beta}\dot{\boldsymbol{\beta}}\right) - \frac{\left(\mathbf{n}\dot{\boldsymbol{\beta}}\right)^2}{\gamma^2 x^2}\right\}d\Omega. \tag{4}$$

Формула (3) допускает следующую наглядную интерпретацию возникновения силы $\mathbf{f}_1$: излучение в направлении $\mathbf{n}$ уносит с собой в единицу времени импульс $dI_n\mathbf{n}/c$, а заряд, следовательно, приобретает импульс $-dI_n\mathbf{n}/c$; поскольку изменение импульса в единицу времени равно действующей силе, то вследствие излучения в направлении $\mathbf{n}$ на частицу будет действовать сила $d\mathbf{f}_1 = -dI_n\mathbf{n}/c$.. Интегрируя по всем направлениям (по полному телесному углу), получим силу $\mathbf{f}_1$ (подробности вычисления см. в [4]):

$$\mathbf{f}_1 = -\frac{I}{c}\boldsymbol{\beta}; \quad I = \frac{2e^2}{3c}\gamma^4\left(\dot{\boldsymbol{\beta}}^2 + \gamma^2\left(\boldsymbol{\beta}\dot{\boldsymbol{\beta}}\right)^2\right). \tag{5}$$

Здесь I – мгновенная мощность излучения, которая является релятивистским инвариантом и имеет вид [3,5]

$$I = -\frac{2}{3}ce^2\frac{du^k}{ds}\frac{du_k}{ds} \tag{5$'$}$$

где $u^k = dx^k/ds$ – 4-х скорость и $ds = cdt/\gamma$ – интервал Минковского (мы следуем обозначениям книги [3]).

Перейдем к силе $\mathbf{f}_2$. Теперь необходимо учесть вклад обоих слагаемых в формуле (2). Вычисления довольно громоздки, к тому же, как легко убедиться, приводят к расходящимся интегралам как на малых, так и на больших расстояниях, связанных с расходимостями собственной энергии и импульса поля заряда. Чтобы обойти эти трудности, поступим следующим образом. Запишем трехмерное уравнение движения $d\mathbf{p}/dt = \mathbf{f} = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2$ в четырехмерном (ковариантном) виде

$$\frac{dp^i}{ds} = g^i = g_1^i + g_2^i, \tag{6}$$

введя 4-х импульс $p^i = mcu^i = (\gamma mc, \mathbf{p})$ и силу $g^i = (\mathbf{f}\boldsymbol{\beta}\gamma/c, \mathbf{f}\gamma/c)$. В формуле (6) g_2^i подлежит определению, а g_1^i с учетом (5) и (5') имеет вид

$$g_1^i = \frac{2e^2}{3c}\frac{du^k}{ds}\frac{du_k}{ds}u^i \; . \tag{6'}$$

Как следует из определения силы $\mathbf{f}_2$ и формулы (2), куда входят лишь векторы $\boldsymbol{\beta}$ и $\dot{\boldsymbol{\beta}}$, четырехмерный вектор g_2^i может выражаться только через векторы u^i, du^i/ds и d^2u^i/ds^2. Первая возможность отпадает, так как при $\mathbf{v} = \text{const}$ должно быть $g' = 0$. Слагаемое, содержащее du^i/ds, объединяется с левой частью уравнения (6) и приводит к перенормировке массы заряженной частицы, так что остается возможность $g_2^i = \alpha d^2u^i/ds^2$, где $\alpha = 2e^2/3c$ есть число (4-х скаляр), которое определяется из требования, что для любой 4-х силы g^i должно быть $g^iu_i = 0$ (при этом надо использовать также тождество $u^iu_i = 1$ и его следствия).

Итак

$$g_2^i = \frac{2e^2}{3c}\frac{d^2u^i}{ds^2} \; . \tag{6''}$$

Из (6") следует выражение для трехмерной силы $\mathbf{f}_2$, которое мы приводим для справочных целей:

$$\mathbf{f}_2 = \frac{2e^2}{3c^2}\gamma^2\left\{\ddot{\boldsymbol{\beta}} + \gamma^2\dot{\boldsymbol{\beta}}^2\boldsymbol{\beta} + 3\gamma^2(\boldsymbol{\beta}\dot{\boldsymbol{\beta}})\dot{\boldsymbol{\beta}} + \gamma^2(\boldsymbol{\beta}\ddot{\boldsymbol{\beta}})\boldsymbol{\beta} + 4\gamma^4(\boldsymbol{\beta}\dot{\boldsymbol{\beta}})^2\boldsymbol{\beta}\right\}.$$

Формулы (6), (6') и (6") приводят к известному выражению (см., например, [3]) для 4-х силы самодействия g^i:

$$g^i = \frac{2e^2}{3c}\left(\frac{d^2u^i}{ds^2} + \frac{du_k}{ds}\frac{du^k}{ds}u^i\right).$$

Отсюда для 3-х мерной силы самодействия $\mathbf{f}$ находим (ср. с соответствующими формулами в [6,7])

$$\mathbf{f} = \frac{2e^2}{3c^2}\{\mathbf{A} + [\boldsymbol{\beta}[\boldsymbol{\beta}\mathbf{A}]]\}, \tag{7}$$

где $\mathbf{A} \equiv \gamma^4(\ddot{\boldsymbol{\beta}} + 3\gamma^2(\boldsymbol{\beta}\dot{\boldsymbol{\beta}})\dot{\boldsymbol{\beta}})$.

В нерелятивистском случае ($\beta \ll 1$), с точностью до первой степени β из (7) получаем следующее выражение для силы самодействия (кстати, укажем, что в формулу (6) работы [5] вкралась ошибка):

$$\mathbf{f} = \frac{2e^2}{3c^2}\ddot{\boldsymbol{\beta}} + \frac{2e^2}{c^2}(\dot{\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{\beta})\dot{\boldsymbol{\beta}}\,. \qquad (7')$$

Эта сила отличается от общепринятой $\mathbf{f}' = 2e^2\ddot{\boldsymbol{\beta}}/3c^2$, которой присущ существенный недостаток: при равноускоренном движении ($\ddot{\boldsymbol{\beta}} = 0$) сила реакции излучения $\mathbf{f}'$ обращается в нуль, в то время как излучение не равно нулю ($\dot{\boldsymbol{\beta}} \neq 0$). Сила (7') лишена этого недостатка и всегда отлична от нуля, если отлично от нуля излучение ($\dot{\boldsymbol{\beta}} \neq 0$). Если $\ddot{\boldsymbol{\beta}} \neq 0$ и первое слагаемое в правой части (7') доминирует, то $\mathbf{f} = \mathbf{f}'$; в зависимости от закона $\boldsymbol{\beta}(t)$ может доминировать и второе слагаемое. В общем случае, при $\beta \ll 1$, для силы самодействия нужно пользоваться формулой (7').

Вышеизложенное позволяет утверждать, что полная сила самодействия, действующая на излучающий заряд, определяется формулой (7), а силой реакции излучения правильнее назвать определяемую формулой (5) силу f_1, которая всегда отлична от нуля, если только частица движется с ускорением и, следовательно, излучает.

С этой точки зрения рассмотрим еще раз равноускоренное движение (при любых скоростях). Как известно, условие того, что движение является равноускоренным, имеет вид [7]

$$\frac{d^2u^i}{ds^2} + \frac{du_k}{ds}\frac{du^k}{ds}u^i = 0\,, \qquad (8)$$

(потому и $g^i = 0$) или в трехмерных обозначениях

$$\ddot{\boldsymbol{\beta}} + 3\gamma^2(\boldsymbol{\beta}\dot{\boldsymbol{\beta}})\dot{\boldsymbol{\beta}} = 0\,. \qquad (8')$$

Следовательно, при таком движении обращается в нуль вектор $\mathbf{A}$ и вместе с ним и сила самодействия. Однако сила реакции излучения, как и излучение, отлично от нуля, поскольку отлично от нуля ускорение, которое, как легко получить из уравнений движения $d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}_0 + \mathbf{f}$, определяется формулой

$$mc\gamma\,\dot{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{F}_0 + \mathbf{f} - \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta}\mathbf{F}_0) - \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta}\mathbf{f})\,. \qquad (9)$$

В нашем случае, при $\boldsymbol{\beta} \parallel \mathbf{F}_0$, $\mathbf{F}_0 = \mathrm{const}$ ускорение равно

$$c\dot{\boldsymbol{\beta}} = \frac{\mathbf{F}_0}{m\gamma^3}\,. \qquad (10)$$

Итак, при равноускоренном движении на заряд действует только внешняя сила $\mathbf{F}_0$ (легко проверить, что при ускорении (10) сила самодействия действительно обращается в нуль). При $\beta \to 1$ ускорение стремится к нулю, в случае же $\beta \to 0$ ускорение, как и следовало ожидать, равно $\mathbf{F}_0 / m.$.

В заключение выражаю благодарность участникам семинара кафедры теоретической физики ЕГУ.

ЛИТЕРАТУРА

1. **В.Г.Левич.** Курс теоретической физики, т.1. М., 1962.
2. **Дж.Джексон.** Классическая электродинамика. М., 1965.
3. **Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц.** Теория поля. М., 1973.
4. **Б.В.Хачатрян.** Изв. НАН Армении, Физика, 32, 260 (1997).
5. **Б.В.Хачатрян.** Изв. НАН Армении, Физика, 33, 179 (1998).
6. **А.Зоммерфельд.** Электродинамика. М., 1958.
7. **В.Л.Гинзбург.** Теоретическая физика и астрофизика. М., 1975.

ՃԱՌԱԳԱՅԹՈՂ ԼԻՑՔԻ ՎՐԱ ԱԶԴՈՂ ՈՒԺԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Բ.Վ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ

Ցույց է տրված, որ ճառագայթման շնորհիվ լիցքավորված մասնիկի վրա ազդող լրացուցիչ ուժերը պայմանավորված են իմպուլսի փոխանակումով, մեկը՝ լիցքի և ճառագայթման դաշտի միջև և մյուս ուժը՝ լիցքի և լիցքի հետ տարվող (լիցքից չպոկվող և անվերջություն չգնացող) դաշտերի միջև:

ON THE FORCES ACTING ON RADIATING CHARGE

B.V. KHACHATRIAN

It is shown that the force acting on a radiating charge is stipulated by two reasons – owing to exchange of a momentum between the radiating charge and electromagnetic field of radiation, and also between the charge and field accompanying the charge.