

УДК 535.016

ПОЛЯРИТОННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ МОДЕЛЬНОЙ СИММЕТРИЧНОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ СТРУКТУРЫ

А.М. ИШХАНИЯН¹, Г.П. ЧЕРНИКОВ²¹Инженерный центр НАН Армении, Аштарак, Армения²РНЦ "Курчатовский Институт", Институт Ядерного Синтеза, Москва, Россия

(Поступила в редакцию 30 апреля 2001 г.)

Изучена задача о поверхностном поляритоне для модельной трехслойной структуры с плавным знакопостоянным профилем диэлектрической проницаемости, в одной точке обращаемой в ноль. Получено полное аналитическое решение задачи, выражающееся в гипергеометрических функциях Гаусса. Выведено дисперсионное соотношение для волнового вектора поверхностного поляритона для случая действительных параметров задачи. Несмотря на простой вид, данное соотношение обладает богатой структурой. Распределение магнитного поля поляритона задается простым выражением в элементарных функциях.

1. Введение

Одной из практически важных задач теории поверхностных электромагнитных волн является задача о поверхностном поляритоне для многослойных структур [1]. Поверхностные поляритоны определяются как локализованные электромагнитные волны, распространяющиеся вдоль границ раздела различных сред [1]. Под локализацией волны понимается обращение ее амплитуды в ноль при неограниченном удалении от границы раздела. Уравнения Максвелла для магнитного поля $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}(\mathbf{r})e^{i\omega t}$, распространяющегося в линейной среде с локально-изотропной, но неоднородной в пространстве диэлектрической проницаемостью $\epsilon(\mathbf{r})$ ($\mu = \text{const}$), сводятся к следующему уравнению, описывающему пространственное изменение $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ [2]:

$$\Delta \mathbf{H} + \nabla \left(\frac{\nabla \mu}{\mu} \mathbf{H} \right) + \frac{\omega^2}{c^2} \mu \tilde{\epsilon} \mathbf{H} = - \frac{\nabla \tilde{\epsilon}}{\tilde{\epsilon}} \times \text{rot} \mathbf{H}, \quad (1)$$

где $\tilde{\epsilon} = \epsilon - i \frac{4\pi\sigma}{\omega}$, σ – проводимость среды.

В частном случае ТМ электромагнитной волны $\mathbf{H} = (0, \tilde{H}, 0)$, распространяющейся в среде, в которой $\tilde{\epsilon} = \tilde{\epsilon}(z)$, уравнение (1) принимает

вид

$$\Delta \tilde{H} - \frac{1}{\tilde{\epsilon}} \frac{d\tilde{\epsilon}}{dz} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial z} + \frac{\omega^2}{c^2} \mu \tilde{\epsilon} \tilde{H} = 0. \quad (2)$$

Тогда амплитуда $H(z)$ бегущей волны, распространяющейся вдоль оси x , $\tilde{H}(x, y, z) = H(z)e^{ikx}$, подчиняется следующему обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка:

$$\frac{d^2 H}{dz^2} - \frac{1}{U} \frac{dU}{dz} \frac{dH}{dz} - (k^2 + U)H = 0, \quad (3)$$

где принято обозначение $U(z) = -\frac{\omega^2}{c^2} \mu \tilde{\epsilon}(z)$.

Уравнение (3) – основное уравнение, описывающее ТМ волны в средах, где диэлектрическая проницаемость зависит только от одной из пространственных координат. С математической точки зрения оно значительно сложнее аналогичного уравнения для ТЕ моды, которое совпадает с хорошо изученным одномерным стационарным уравнением Шредингера [3]. Даже для простейшей двухслойной структуры с плавно меняющимся профилем диэлектрической проницаемости, первое аналитическое решение (для профиля, имеющего вид гиперболического тангенса) получено лишь недавно [4].

В настоящей работе нами приводится точное аналитическое решение в гипергеометрических функциях Гаусса поляритонной задачи для модельной трехслойной симметричной структуры. Профиль диэлектрической проницаемости имеет вид квадрата гиперболического тангенса. При этом в одной точке диэлектрическая проницаемость обращается в ноль, причем в окрестности нуля профиль приблизительно параболический. Закон, по которому профиль диэлектрической проницаемости проходит через ноль играет важную роль в формировании дисперсионного соотношения для волнового числа поляритона [4]. Дисперсионное соотношение для рассматриваемой трехслойной структуры в случае, когда все вовлеченные параметры действительны, имеет довольно простой вид, но обладает богатым набором свойств. Для металлических сред поляритон существует всегда и поляритонное волновое число единственно. Для диэлектрических же сред возможны различные варианты. Оказывается, что существует критическое значение диэлектрической проницаемости, зависящее от толщины переходного слоя, выше которого существование поляритонов невозможно. Это же наблюдение можно сформулировать в другом, практически полезном виде, а именно: при фиксированном значении диэлектрической проницаемости существует критическая толщина среднего слоя, при превышении которой поляритон исчезает. На это примечательное свойство трехслойных структур

было указано в [5]. Ниже же критического значения диэлектрической проницаемости существуют два значения волнового числа поляритона.

2. Модель

Симметричная трехслойная структура, рассматриваемая в настоящей статье, задается следующей зависимостью функции U от пространственной координаты:

$$U(z) = U_0 \operatorname{th}^2 \left(\frac{z - z_0}{2\tau} \right), \quad (4)$$

где τ – параметр, определяющий ширину среднего слоя. Профиль соответствующей диэлектрической проницаемости $\tilde{\epsilon}$ приведен на рис.1.

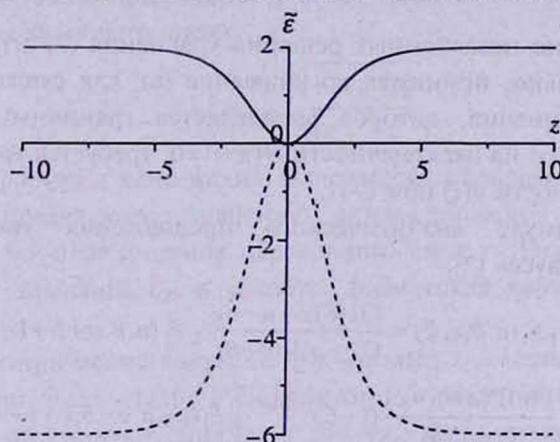


Рис.1. Профиль диэлектрической проницаемости $\tilde{\epsilon}(z)$ для диэлектрической (сплошная линия, $\tilde{\epsilon}(\pm\infty)=2$, $\tau=1$) и металлической (пунктирная линия, $\tilde{\epsilon}(\pm\infty)=-6$, $\tau=1$) сред.

Преобразованием независимой переменной $\xi = \operatorname{th}[(z - z_0)/2\tau]$, которое взаимно однозначно отображает ось z на отрезок $[-1, 1]$, уравнение (3) приводится к уравнению типа Фукса [6]:

$$\frac{d^2 H}{d\xi^2} + \left(\frac{1}{\xi-1} + \frac{1}{\xi+1} - \frac{2}{\xi} \right) \frac{dH}{d\xi} - 4 \frac{(k^2 + U_0 \xi^2) \tau^2}{(1-\xi^2)^2} H = 0. \quad (5)$$

Нетрудно проверить, что дальнейшая замена независимой переменной $\xi^2 = \zeta$, отображающая отрезок $[-1, 1]$ на $[0, 1]$, и замена искомой функции

$$H(\zeta) = (1-\zeta)^{\tau\sqrt{k^2+U_0}} u(\zeta) \quad (6)$$

приводят уравнение (3) к каноническому виду гипергеометрического уравнения Гаусса:

$$\frac{d^2 u}{d\zeta^2} + \left(-\frac{1/2}{\zeta} + \frac{1+2\tau\sqrt{k^2+U_0}}{\zeta-1} \right) \frac{du}{d\zeta} - \frac{\tau(-2\tau k^2 + \sqrt{k^2+U_0})}{2\zeta(\zeta-1)} u = 0. \quad (7)$$

Общее решение этого уравнения, как известно [7], имеет вид

$$u(\zeta) = C_1 \cdot {}_2F_1(a, b, c, \zeta) + C_2 \zeta^{1-c} {}_2F_1(a', b', c', \zeta), \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} a, b &= -\frac{1}{4} + \tau\sqrt{k^2+U_0} \pm \frac{1}{4}\sqrt{1+16\tau^2 U_0}, \quad c = -\frac{1}{2}, \\ a', b' &= \frac{5}{4} + \tau\sqrt{k^2+U_0} \pm \frac{1}{4}\sqrt{1+16\tau^2 U_0}, \quad c' = \frac{5}{2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Оба линейно-независимых решения уравнения (7) ограничены при $\zeta=0$. Следовательно, принимая во внимание (6), для существования полярного решения, которое определяется граничными условиями для функции $H(z)$ на бесконечности $H(\pm\infty)=0$, требуется выполнение условия ограниченности $u(\zeta)$ при $\zeta \rightarrow 1$.

Формула аналитического продолжения гипергеометрической функции Гаусса [7],

$$\begin{aligned} {}_2F_1(a, b, c, \zeta) &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \cdot {}_2F_1(a, b, a+b+1-c, 1-\zeta) + \\ &+ \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} (1-\zeta)^{c-a-b} \cdot {}_2F_1(c-a, c-b, c+1-a-b, 1-\zeta), \end{aligned}$$

показывает [так как $(c-a-b) = (c'-a'-b') = -2\tau\sqrt{k^2+U_0}$ и, следовательно, $(1-\zeta)^{c-a-b}$ расходится при $\zeta \rightarrow 1$], что вышеуказанные гипергеометрические функции могут быть ограничены при $\zeta \rightarrow 1$ только, если второе слагаемое в формуле аналитического продолжения зануляется. Это происходит только тогда, когда один из параметров (a, b) [${}_2F_1(a, b, c, \zeta)$ ограничена] или (a', b') [${}_2F_1(a', b', c', \zeta)$ ограничена] равен нулю или отрицательному целому числу. Исследование возможных вариантов показывает, что, если все вовлеченные величины действительны, то может быть выполнено только условие

$$ab = \tau^2 k^2 - \frac{\tau}{2} \sqrt{k^2+U_0} = 0. \quad (10)$$

Очевидно, что ${}_2F_1(a', b', c', \zeta)$ при $\zeta \rightarrow 1$ всегда расходится, поэтому C_2 в формуле (8) равно нулю, и все ограниченные на $[0, 1]$ решения уравнения (7) являются константами:

$$u(\zeta) = C_1 \cdot {}_2F_1(0, b, c, \zeta) = \text{const}. \quad (11)$$

Таким образом, пространственное распределение магнитного поля (после проведения обратных замен независимых и зависимых переменных)

выражается через элементарные функции, а именно:

$$H(z) = H_0 \left(1 - \operatorname{th}^2 \left(\frac{z - z_0}{2\tau} \right) \right)^{\tau \sqrt{k^2 + U_0}}, \quad H_0 = \text{const}. \quad (12)$$

3. Дисперсионное соотношение

Условие (10) представляет собой единственное дисперсионное соотношение для поляритонного волнового числа, если все параметры задачи действительны. (Мы не обсуждаем здесь ситуацию, когда диэлектрическая проницаемость комплексна, а также возможность короткомасштабных поляритонов, когда волновое число имеет ненулевую мнимую часть.) Можно представить это соотношение в виде, разрешенном относительно волнового числа:

$$k^2 = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 16\tau^2 U_0}}{8\tau^2}. \quad (13)$$

Из данной формулы ясно видна зависимость поляритонного волнового числа от предельного значения диэлектрической проницаемости $U_0 \sim -\tilde{\epsilon}(z=\pm\infty)$ и от ширины переходного слоя τ . Легко можно видеть три области значений U_0 , в которых физическая картина совершенно разная.

Диэлектрические среды со значениями U_0 , меньшими критического значения $U_{0cr} = -1/16\tau^2$. Поляритонные решения с чисто действительными k отсутствуют. Видно, и это уже было отмечено выше, что, варьируя толщину переходного слоя, любое данное значение диэлектрической проницаемости U_0 можно сделать и большим, и меньшим критического.

Диэлектрические среды со значениями U_0 , лежащими в интервале $(U_{0cr}, 0)$. В данном случае имеют место два поляритонных решения с волновыми числами соответственно $k = ((1 - \sqrt{1 + 16\tau^2 U_0}) / 8\tau^2)^{1/2}$ и $k = ((1 + \sqrt{1 + 16\tau^2 U_0}) / 8\tau^2)^{1/2}$.

Таким образом, диэлектрическая среда либо не поддерживает поверхностных электромагнитных волн [$\tilde{\epsilon}(\pm\infty) > \tilde{\epsilon}_{cr} = (c^2/\omega^2\mu) \times (1/16\tau^2) > 0$], либо существуют сразу два поляритона [если $0 < \tilde{\epsilon}(\pm\infty) < \tilde{\epsilon}_{cr}$]. Здесь следует отметить, что соответствующее уравнение для ТЕ волны с данным профилем диэлектрической проницаемости, как и в случае задачи с соответствующим ступенчатым профилем, вообще не должно иметь локализованных решений (см. [2,3]). Это очевидно, если вспомнить полную аналогию уравнения для ТЕ моды и одномерного стационарного уравнения Шредингера. Так как $\tilde{\epsilon}(\pm\infty) > 0$, то с квантовой точки зрения соответствующий профиль $U(z)$ представляет собой потенциальный барьер. Как хорошо известно из теории уравнения

Шредингера, в данном случае связанных состояний не существует. (Очевидно, что связанные состояния в квантовой механике и локализованные решения в теории поверхностных волн – просто различные проявления одной и той же математической структуры.) Данное различие в свойствах ТМ и ТЕ мод, конечно, обусловлено наличием в уравнении (2) члена с первой производной напряженности магнитного поля, пропорционального логарифмической производной диэлектрической проницаемости. Именно наличие данного слагаемого, дополнительно к членам, стандартным для одномерного уравнения Шредингера, приводит к столь радикальному изменению условий существования локализованных решений.

И, наконец, металлическая среда: $U_0 > 0$ ($\bar{\epsilon} < 0$). Существует единственное поляритонное решение с волновым числом $k = ((1 + \sqrt{1 + 16\tau^2 U_0}) / 8\tau^2)^{1/2}$. Также и в данном случае наличие в уравнении для ТМ моды члена с первой производной, пропорционального градиенту диэлектрической проницаемости, кардинально меняет условия существования локализованных решений по сравнению с условием для ТЕ моды. Действительно, для металлов $U(z = \pm\infty) > 0$, и, следовательно, профиль $U(z)$ в данном случае представляет собой потенциальную яму. В соответствии с квантовомеханической теорией, частица в потенциальной яме должна иметь связанные состояния, и их число должно увеличиваться с ростом глубины ямы. Для ТЕ моды это означает, что с ростом предельного значения U количество возможных локализованных решений, т.е. число волноводных мод растет. А для ТМ моды ситуация другая: как мы убедились, всегда существует лишь один единственный поляритон.

4. Заключение

Таким образом, мы представили аналитическое решение задачи о поверхностном поляритоне для трехслойной структуры со знакопостоянным гладким профилем диэлектрической проницаемости, обращаемся в ноль в одной единственной точке. Получено простое дисперсионное соотношение для волнового числа поляритона для случая действительных параметров задачи. Это соотношение имеет качественно схожие свойства с соотношениями, полученными в работах [5] для трехслойной структуры с резкими границами. Для металлических сред во всем диапазоне значений толщины центрального слоя и диэлектрической проницаемости существует поляритон, при этом волновое число поляритона единственно. А для диэлектрических сред возможны два случая: при достаточно малой толщине центрального слоя существует два независимых поляритона; если же толщина превышает некую критическую, поляритонов нет вообще.

Следует отметить, что рассмотренная выше модель профиля диэлектрической проницаемости с физической точки зрения представляет собой довольно вырожденный случай, так как описывает симметричную структуру с квадратичным касанием нуля. Мы надеемся изучить менее вырожденные случаи в дальнейшем.

Работа выполнена при поддержке грантов Международного Научно-Технического Центра (ISTC No.A-215) и Армянского Национального Фонда Науки и Образования (ANSEF No. PS-1).

ЛИТЕРАТУРА

1. H.Raether. Surface Plasmons. Springer-Verlag, Berlin, 1988; A.D.Boardman (ed.). Electromagnetic Surface Modes. Wiley, London, 1982; V.M.Agranovich and D.L.Mills (ed.). Surface Polaritons. North-Holland, Amsterdam, 1982.
2. A.W.Snyder and J.D.Love. Optical Waveguide Theory. Chapman and Hall, London, 2000.
3. Л.Д.Ландау и Е.М.Лифшиц. Квантовая механика. М., Наука, 1989.
4. А.М.Ишханян. Доклады НАН Армении, 101, №2 (2001).
5. F.Yang, J.R.Sambles, and G.W.Bradberry. Phys. Rev. B, 44, 5855 (1991); J.J.Burke, G.I.Stegeman, and T.Tamir. Phys. Rev. B, 33, 5186 (1986).
6. E.Kamke. Handbook of Ordinary Differential Equations. Dover, New York, 1976; S.Yu.Slavyanov and W.Lay. Special functions. Oxford University Press, Oxford, 2000.
7. M.Abramovitz and I.A.Stegun (ed.). Handbook of Mathematical Functions. Dover, New York, 1965.

ՊՈԼՅԱՐԻՏՈՆԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐԸ ՄԻ ՍՈԳԵԼԱՅԻՆ ՄԻՍԵՏՐԻԿ ԵՌԱՇԵՐՏ ԿԱՌՈՒՑՎԱԾՔԻ ՀԱՄԱՐ

Ա.Մ. ԻՇԽԱՆՅԱՆ, Գ.Պ. ՉԵՌՆԻԿՈՎ

Ուսումնասիրված է մակերեւութային պոլյարիտոնի խնդիրը մի կետում զրո ունեցող, հարթ, նշանահաստատուն դիէլեկտրական թափանցելիության պրոֆիլով մի մոդելային սիմետրիկ եռշերտ կառուցվածքի համար: Ստացված է խնդրի լուծումը Գաուսի հիպերերկրաչափական ֆունկցիաներով: Դուրս է բերված մակերեւութային պոլյարիտոնի ալիքային քվի դիսպերսիոն առնչությունը խնդրի իրական պարամետրերի դեպքի համար: Չնայած պարզ տեսքին, այդ առնչությունը օժտված է հարուստ կառուցվածքով: Պոլյարիտոնային մագնիսական դաշտի բաշխվածության համար ստացվում է տարրական ֆունկցիաներով տրվող պարզ արտահայտություն:

POLARITON PROBLEM FOR A MODEL SYMMETRIC THREE-LAYER STRUCTURE

A.M. ISHKHANYAN, G.P. CHERNIKOV

The surface polariton problem for a model symmetric three-layer structure with a smooth sign-constant profile of the dielectric permittivity that has a zero in a single point is studied. The complete solution of the problem in terms of Gauss hypergeometric functions is derived. The dispersion relation for the surface polariton's wave vector for the case of real parameters involved is obtained. Despite its simple form, the relation possesses a rich structure. The distribution of the polariton magnetic field is given by a simple expression in terms of elementary functions.