

УДК 535.14

НЕКЛАССИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА В ХАОТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКЕ

Г.Ю. КРЮЧКЯН, С.Б. МАНВЕЛЯН

Ереванский государственный университет

(Поступила в редакцию 22 июня 2001 г.)

Исследованы статистические свойства квантовой системы – диссипативного ангармонического осциллятора, управляемого двумя периодическими силами, которая в классическом пределе становится хаотической. Найдено, что несмотря на хаотичность, в системе реализуются сжатые по числу элементарных возбуждений состояния, что объясняется соответствующей симметрией функции Вигнера в фазовом пространстве. Исходя из соответствия функции Вигнера и сечения Пуанкаре, сделан вывод о возможности предсказывать формирование неклассических состояний в квантовой системе по сечению Пуанкаре.

Проблема квантового хаоса является одной из самых интересных нерешенных проблем в нелинейной физике. Она состоит в том, чтобы изучить, какие квантовые эффекты возникают в системе, которая в классическом пределе становится хаотичной. Тем самым ставится вопрос о критерии квантового хаоса, который, несмотря на многочисленные публикации на эту тему, остается открытым [1]. Экспериментальное наблюдение квантового хаоса всегда подразумевает наличие диссипации. Однако исследование квантовых диссипативных систем затруднительно, и им посвящено значительно меньше работ, чем гамильтоновым системам. В основном эти работы касаются распределения вероятностей в фазовом пространстве (в том числе функции Вигнера), а также различным энтропийным характеристикам [2,3]. Возникает вопрос – возможна ли генерация неклассических состояний, таких, как квадратурно-сжатые состояния и состояния, сжатые по числу элементарных возбуждений (или, как их иначе называют, состояния с субпуассоновской статистикой), в хаотическом режиме? Такие состояния не имеют классического аналога, и, возможно, их исследование прольет дополнительный свет на проблему квантового хаоса.

В настоящей работе рассматривается возможность генерации сжатых по числу элементарных возбуждений состояний в квантовой системе, чей классический предел имеет хаос. В качестве примера рассмотрим модель диссипативного ангармонического осциллятора с двумя



периодическими управляющими силами различных частот. Гамильтониан системы имеет вид

$$H = \hbar \omega_0 a^+ a + \hbar \chi (a^+ a)^2 + \hbar [(\Omega_1 e^{-i\omega_1 t} + \Omega_2 e^{-i\omega_2 t}) a^+ + \text{H.c.}] \quad (1)$$

Здесь a и a^+ – бозонные операторы уничтожения и рождения, ω_0 – собственная частота осциллятора, а χ – коэффициент ангармоничности. Амплитуды двух управляющих сил даются соответствующими частотами Раби Ω_1 и Ω_2 , их частоты равны ω_1 и ω_2 , а H.c. означает эрмитовое сопряжение. Диссипация рассматривается стандартным образом, как взаимодействие системы с термостатом. Так как рассматриваемая система открыта, то мы применили подход матрицы плотности. Эволюция системы в этом случае описывается уравнением для матрицы плотности в форме Линдблада:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [H, \rho] + \gamma \left(a \rho a^+ - \frac{1}{2} a^+ a \rho - \frac{1}{2} \rho a^+ a \right), \quad (2)$$

где γ – коэффициент затухания осциллятора. Эта модель предложена в наших предыдущих работах для исследования стохастического резонанса [4] и квантового хаоса [5].

Мы решили уравнение (2) численно с помощью метода квантовой стохастической диффузии [6]. Применительно к рассматриваемой системе, этот метод подробно описан в наших предыдущих статьях [4,5]. Наша цель состоит в вычислении эволюции фактора Фано и функции Вигнера.

Как известно, фактор Фано является дисперсией числа элементарных возбуждений n , нормированной на уровень возбуждений когерентного состояния:

$$F = \frac{\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2}{\langle n \rangle} = \frac{\langle (\Delta n)^2 \rangle}{\langle n \rangle}. \quad (3)$$

При $F = 1$ распределение элементарных возбуждений пуассоновское, при $F > 1$ и $F < 1$ распределение называется суперпуассоновским (например, тепловое излучение) и субпуассоновским соответственно (для примеров см. [7,8]). Для фоковских состояний $F = 0$. На первый взгляд, можно предположить, что в области квантового хаоса должна реализовываться суперпуассоновская статистика, как отражение неупорядоченной структуры классического предела. Рассмотрим этот вопрос детальнее в рамках нашей системы.

Исходя из возможностей компьютерного расчета, мы исследовали временную эволюцию фактора Фано в режиме, при котором максимальное число элементарных возбуждений составляет 130 и который, сле-

довательно, можно считать квазиклассическим. Параметры при этом выбирались так, чтобы в классическом пределе система проявляла хаос [5]: $\chi/\gamma = 0.1$, $\Delta/\gamma = -15$, $\Omega_1/\gamma = \Omega_2/\gamma = 27$, и $\delta/\gamma = 5$, где $\delta = \omega_2 - \omega_1$ – модуляционная частота. Результат представлен на рис.1. Оказывается, в течение периода фактор Фано принимает значения как больше единицы, так и меньше ее. Таким образом, мы получили неожиданный результат: квантовая система, классический предел которой имеет хаос, может проявлять достаточно сильную субпуассоновскую статистику в течение определенных промежутков времени, с минимальным фактором Фано $F_{\min} = 0.34$. В остальные промежутки времени система, как и ожидалось, имеет суперпуассоновскую статистику. Необходимо отметить, что наличие субпуассоновской статистики для диссипативного ангармонического осциллятора была предсказана в ряде работ: в случае одной внешней силы в [7], а в случае двух сил, в области регулярной динамики, в [8].

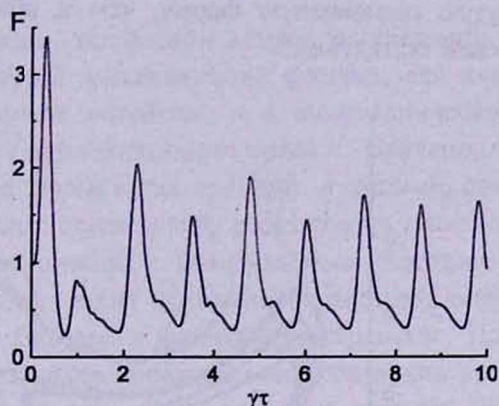


Рис.1. Эволюция фактора Фано при параметрах, для которых в классическом пределе реализуется хаос.

Чтобы прояснить полученный результат, проанализируем с классической и квантовой точек зрения поведение диссипативного ангармонического осциллятора, управляемого двумя периодическими силами, в фазовой плоскости (X, Y) , где X и Y – соответствующие безразмерные координата и импульс. Стандартный способ классического анализа хаотической системы заключается в построении т.н. сечения Пуанкаре: в плоскости (X, Y) отмечаются точки, в которых система находится в моменты времени $t_n = t_0 + (2\pi/\delta)n$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Такое сечение для нашей системы представлено на рис.2 для $t_0 = 4.43$. Оно имеет типичную для диссипативных хаотических систем фрактальную структуру. Моменты времени $t_n = 4.43 + (2\pi/\delta)n$, $n = 0, 1, 2, \dots$ на рис.1 соответствуют

временным интервалам, для которых фактор Фано принимает минимальные значения. Одним из способов квантового анализа системы в фазовом пространстве является функция Вигнера, являющаяся распределением квазивероятности состояния системы в фазовом пространстве. Контурная карта функции Вигнера в моменты времени $t_n = t_0 + (2\pi/\delta)n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, где $t_0 = 4.43$, соответствующие минимальным значениям фактора Фано, представлена на рис.3. Из сравнения рис.2 и 3 видно, что в этом квазиклассическом режиме функция Вигнера занимает ту же область фазового пространства, что и сечение Пуанкаре. Отметим, что такое сходство не имеет места в существенно квантовом режиме для малых чисел элементарных возбуждений [5]. Известно, что если квантовое состояние имеет в фазовом пространстве близкую к серповидной форму с центром серпа в начале координат, то это свидетельствует о сжатии квантовых флуктуаций по числу элементарных возбуждений, т.е. свидетельствует о субпуассоновской статистике [9]. Из рис.3 можно заметить, что функция Вигнера действительно имеет приплюснутую серповидную форму, чем и объясняется наличие субпуассоновской статистики.

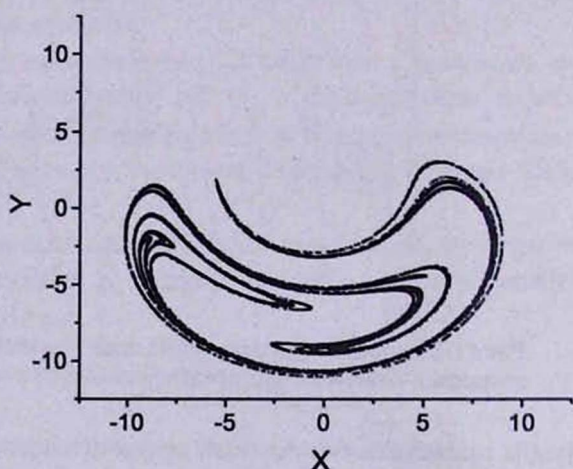


Рис.2. Сечение Пуанкаре (приблизительно 10000 точек), построенное для моментов времени, при которых реализуется минимальное значение фактора Фано.

Из вышесказанного вытекает также вывод о возможности предсказания наличия субпуассоновской статистики в квантовой системе, исходя из ее классического сечения Пуанкаре. Действительно, как мы показали, функция Вигнера близка по форме к соответствующему сечению Пуанкаре, и по ней возможно судить о субпуассоновской статистике состояния системы.

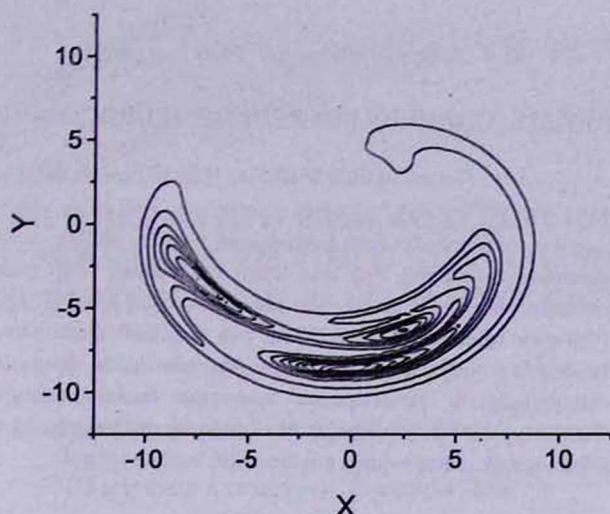


Рис.3. Функция Вигнера, соответствующая минимуму фактора Фано.

Таким образом, исследован вопрос о генерации неклассических состояний в квантовой диссипативной системе, чей классический предел имеет хаотическое поведение – в ангармоническом осцилляторе, управляемом двумя периодическими силами. Найдено, что периодически, в определенные промежутки времени, в системе, помимо состояний с суперпуассоновской статистикой, реализуются также состояния с субпуассоновской статистикой, с минимальным фактором Фано, равным $F_{\min}=0.34$. Образование таких состояний объяснено определенной симметрией функции Вигнера в фазовом пространстве. Показана возможность предсказывать формирование неклассических состояний в квантовой хаотической системе, основываясь на сечении Пуанкаре ее классического предела.

ЛИТЕРАТУРА

1. Quantum Chaos, eds. G.Casati and B.Chirikov. Cambridge University Press, 1995; F.Haake. Quantum Signatures of Chaos. Springer-Verlag, Berlin, 2000.
2. T.Dittrich and R.Graham. Europhys. Lett., 4, 263 (1987).
3. W.H.Zurek and J.P.Paz. Phys. Rev. Lett., 72, 2508 (1994); S.Habib, K.Shizume, and W.H.Zurek. Phys. Rev. Lett., 80, 4361 (1998).
4. H.H.Adamyan, S.B.Manvelyan, and G.Yu.Kryuchkian. Phys. Rev. A, 63, 022102, (2001).
5. H.H.Adamyan, S.B.Manvelyan, and G.Yu.Kryuchkian. Phys. Rev. E (2001) (в печати); S.B.Manvelyan and G.Yu.Kryuchkian. Phys. Rev. Lett. (в печати).
6. N.Gisin and I.C.Percival. J. Phys., A 25, 5677 (1992).
7. P.D.Drummond and D.Walls. J. Phys., A 13, 725 (1980); D.J.Daniel and G.J.Milburn. Phys. Rev. A, 39, 4628 (1989); K.V.Kheruntsyan. J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt., 1, 225 (1999).
8. С.Б.Манвелян. Известия НАН Армении, Физика, 36, 189 (2001).
9. М.К.Тайш, Б.Э.А.Салз. УФН, 161, 101 (1991).

ՈՉ ԴԱՍԱԿԱՆ ՎԻՃԱԿԱԳՐՈՒԹՅՈՒՆԸ ԶԱՌՍԱՅԻՆ ԴԻՆԱՄԻԿԱՅՈՒՄ

Գ.ՅՈՒ. ԿՐՅՈՒՉԿՅԱՆ, Ս.Բ. ՄԱՆՎԵԼՅԱՆ

Հետազոտված են քվանտային համակարգի – անհարմոնիկ տատանակ, կառավարվող երկու պարբերական ուժերով, որը դասական սահմանում ունի քաոս, - վիճակագրական հատկությունները: Գտնված է, որ, չնայած քաոսայնությանը, այդ համակարգում իրականանում են ըստ էլեմենտար գոտումների թվի սեղմված վիճակներ, ինչը բացատրված է Վիգների ֆունկցիայի համապատասխան համաչափությամբ փուլային տարածության մեջ: Վիգների ֆունկցիայի և Պուանկարեի հատույթի համապատասխանությունից ելնելով արված է հետևություն, որ, իմանալով Պուանկարեի հատույթը, հնարավոր է գուշակել ոչ դասական վիճակների առաջացումը քվանտային համակարգում:

NONCLASSICAL STATISTICS IN CHAOTIC DYNAMICS

G.YU. KRYUCHKYAN, S.B. MANVELYAN

The statistical properties of the quantum system – dissipative anharmonic oscillator driven by two periodic forces, – the classical limit of which has a chaotic behavior, are studied. It is found that in spite of the chaos, the states squeezed on elementary excitation numbers are realized. This phenomenon is explained by the corresponding symmetry of the Wigner function in phase space. As there is a correspondence between the Wigner function and Poincare section, it is concluded about the possibility to predict the formation of nonclassical states in a quantum system by the knowledge of the Poincare section.