Известия НАН Армении, Физика, т.36, №2, с.55-61 (2001)

УДК 539.182

НОВЫЕ РЕШЕНИЯ ДВУХУРОВНЕВОЙ ЗАДАЧИ. II. РЕШЕНИЯ В БИКОНФЛЮЕНТНЫХ ФУНКЦИЯХ ГОЙНА

В.Р. КАЗАРЯН, А.М. ИШХАНЯН

Инженерный центр НАН Армении

(Поступила в редакцию 30 ноября 2000 г.)

Рассмотрена сводимость двухуровневой задачи к биконфлюентному уравнению Гойна, представляющему собой естественное обобщение вырожденного гипергеометрического уравнения. Указано обобщение и альтернативное представление решений двухуровневых задач для классов моделей Ландау-Зинера, Никитина и Кротерса через биконфлюентные функции Гойна. Показано, что двухуровневые модели в случае, когда амплитуда поля постоянна, а расстройка изменяется как $\delta_0 t+\delta_2 t^3$ или $\sim t^{1/3}$ (суб- и суперлинейные и существенно нелинейные пересечения термов), описываются биконфлюентными функциями Гойна.

1. Введение

Естественным обобщением вырожденного гипергеометрического уравнения является так называемое биконфлюентное уравнение Гойна (БКУГ) [1], которое, как и вырожденное гипергеометрическое уравнение, имеет две особые точки: одну регулярную (в начале координат) и одну иррегулярную (в бесконечности) с рангом сингулярности на единицу выше, чем у вырожденного гипергеометрического уравнения (следует отличать биконфлюентное уравнение от *дважды* конфлюентного уравнения Гойна [1], которое мы изучим впоследствии).

Каноническая форма этого уравнения, обозначаемая по классификации Инке [2] как $[0,1,1_4]$, имеет вид

$$u_{xx}+\frac{1+\alpha-\beta x-2x^2}{x}u_x+\frac{(\gamma-\alpha-2)x-1/2[\delta+(1+\alpha)\beta]}{x}u=0\,. \qquad (1)$$

В наших целях, однако, удобнее пользоваться другой формой, получающейся из (1) заменой $x=sz$ (по аналогии с тем, как мы поступали в случае вырожденного гипергеометрического уравнения [3]):

$$u_{zz}+\frac{Cz^2+Az+B}{z}u_z+\frac{Ez+D}{z}u=0\,, \qquad (2)$$

где введены следующие обозначения:

$$C=-2s^2,\ A=-s\beta,\ B=1+\alpha,\ E=(\gamma-\alpha-2)s^2,\ D=-\frac{1}{2}s[\delta+(1+\alpha)\beta]. \quad (3)$$

О тесной связи БКУГ и вырожденного гипергеометрического уравнения свидетельствует уже тот очевидный факт, что первое прямо переходит во второе при C=E=0. Примечательно, однако, что БКУГ может быть преобразовано в вырожденное гипергеометрическое уравнение и совершенно другим способом, а именно, заменой $z=\sqrt{z'}$, если A=D=0 (или β=δ=0), в чем легко убедиться прямой подстановкой.

Это наблюдение дает альтернативное представление для решений известных моделей Ландау-Зинера [4], Никитина [5] и Кротерса [6] через биконфлюентные функции Гойна. Последнее замечание, в свою очередь, позволяет описать с единых позиций, как мы убедимся ниже, пять классов моделей двухуровневой задачи, представляющих различные аспекты процессов пересечения термов в квантовых системах. Подобное единое описание тем более интересно с теоретической точки зрения, поскольку ряд других важных квантовомеханических задач также могут быть сведены к БКУГ. К их числу принадлежат, например, радиальная задача для гармонического осциллятора, квантовая задача о дважды ангармоническом осцилляторе и т.д. [1,7].

2. Пять классов решений двухуровневой задачи

Как обычно, будем искать базисные модели U^*, δ^* двухуровневой задачи (см. [3,8]), удовлетворяющие уравнениям

$$i\delta_z^* - \frac{U_z^*}{U^*} = 2\frac{\varphi_z}{\varphi} + f, \quad U^{*2} = \frac{\varphi_{zz}}{\varphi} + f\frac{\varphi_z}{\varphi} + g, \quad (4)$$

исходя из определенного вида фактора φ, который диктуется структурой коэффициентов f и g исходного уравнения (2), а именно,

$$\frac{\varphi_z}{\varphi} = \frac{\alpha_1}{z} + \alpha_0 + \alpha_2 z. \quad (5)$$

Очевидно, что тогда U^* и δ_z^* должны быть представлены как

$$\frac{U_z^*}{U^*} = \frac{k}{z}, \quad \delta_z^* = \frac{\delta_1}{z} + \delta_0 + \delta_2 z. \quad (6)$$

Подстановка (5) и (6) в (4) показывает, что должно быть k=–1, –1/2,0,1/2,1. Тогда мы сразу приходим к соотношениям

$$\alpha_1^2 + \alpha_1(1+k-i\delta_1) + Q(0) = 0,$$

$$\alpha_2^2 - i\delta_2\alpha_2 + \frac{Q^{(IV)}(0)}{4!} = 0, \quad (7)$$

$$\alpha_0(i\delta_2 - 2\alpha_2) = \frac{Q^{(III)}(0)}{3!} - i\delta_0\alpha_2,$$

где введено обозначение $Q(z)=z^2U^{*2}=U_0^{*2}z^{2k+2}$. При этом параметры A,B,C и D,E уравнения (2) однозначно определяются формулами

$$\begin{aligned}
&A=-2\alpha_0+i\delta_0,\\
&B=-k-2\alpha_1+i\delta_1,\\
&C=-2\alpha_2+i\delta_2,\\
&D=-[2\alpha_1\alpha_0+\alpha_1 A+\alpha_0 B]+Q'(0),\\
&E=-[\alpha_2+\alpha_0^2+2\alpha_1\alpha_2+\alpha_1 C+\alpha_0 A+\alpha_2 B]+\frac{Q''(0)}{2}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Следовательно, соотношения (7) и (8) полностью определяют решение двухуровневых задач для следующих пяти классов моделей:

$$\begin{aligned}
&U(t)=U_0^* z^k \frac{dz}{dt},\quad k=-1,-1/2,0,1/2,1,\\
&\delta_t(t)=\left(\frac{\delta_1}{z}+\delta_0+\delta_2 z\right)\frac{dz}{dt}
\end{aligned} \tag{9}$$

(здесь $z=z(t)$ – произвольная функция времени, задающая взаимно-однозначное отображение $z\leftrightarrow t$) через биконфлюентные функции Гойна:

$$a_1=\frac{1}{\varphi(z)}H(A,B,C,D,E;z). \tag{10}$$

Нетрудно заметить, что классы с $k=-1,0,1$ являются обобщениями классов Ландау-Зинера, Никитина и Кротерса ([4-6], см. также [3]): требуется лишь положить $\delta_0=0$ и сделать замену $z=\sqrt{z'}$. Принципиально новые модели определяют классы с $k=\pm 1/2$.

Класс $k=-1/2$:

$$U(t)=\frac{U_0^*}{\sqrt{z}}\frac{dz}{dt},\quad \delta_t=\left(\frac{\delta_1}{z}+\delta_0+\delta_2 z\right)\frac{dz}{dt}. \tag{11}$$

Примечательный член данного семейства получается при выборе $\delta_1=0$ и $z=t^2$:

$$U(t)=2U_0^*=\mathrm{const},\quad \delta_t(t)=2\left(\delta_0 t+\delta_2 t^3\right). \tag{12}$$

Как видно, при $\delta_0\delta_2>0$ эта модель описывает суперлинейное пересечение термов, а при $\delta_0\delta_2<0$ – сублинейное (рис.1). Отметим, что последний случай представляет еще и тройное пересечение термов (рис.1). Кроме того, при $|\delta_2|>>|\delta_0|$ мы имеем режим существенно нелинейного пересечения термов (рис.2). При $\delta_0=0$ это пересечение происходит по чисто кубическому закону: $\delta_t=2\delta_2 t^3$. Перечисленные выше виды пересечения термов впервые были приближенными методами изучены в [8].

Класс $k=+1/2$:

$$U(t)=U_0^*\sqrt{z}\frac{dz}{dt},\quad \delta_t(t)=\left(\frac{\delta_1}{z}+\delta_0+\delta_2 z\right)\frac{dz}{dt}. \tag{13}$$

Важным членом этого семейства является модель, описывающая другой тип существенно нелинейного пересечения термов. Она получается при выборе $\delta_0=\delta_1=0$, $z=t^{2/3}$:

$$U(t)=\frac{2}{3}U_0^*,\quad \delta_t(t)=\frac{2}{3}\delta_2 t^{1/3}. \tag{14}$$

График функции фазовой модуляции приведен на рис.2.

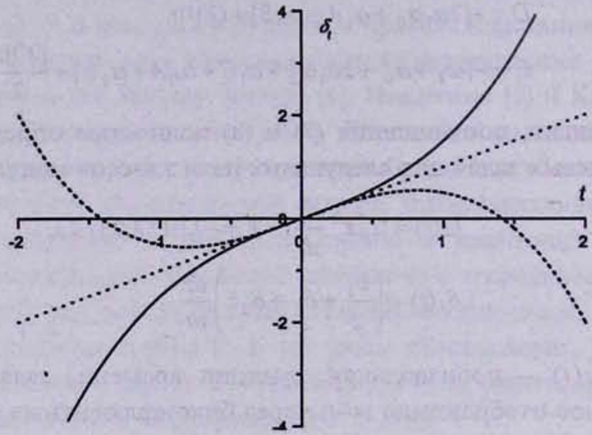

Рис.1. Модель $k=-1/2$. Функция амплитудной модуляции постоянна. Приведены функции фазовой модуляции при δ_0=0.5, δ_1=0, δ_2=+0.25 (суперлинейное пересечение термов – сплошная линия) и δ_0=0.5, δ_1=0, δ_2=–0.25 (сублинейное пересечение термов – пунктирная линия). Прямая линия представляет модель Ландау-Зинера.

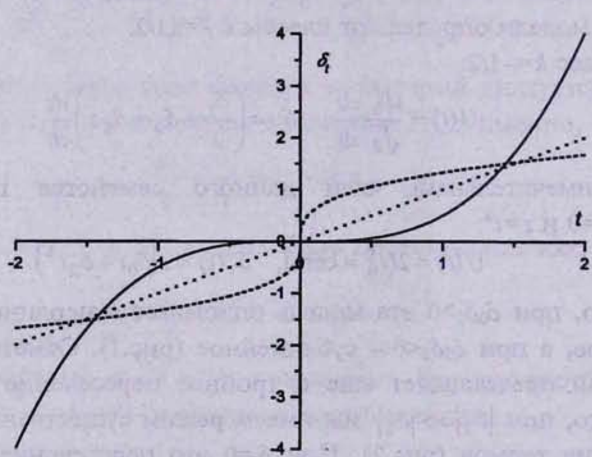

Рис.2. Модель $k=-1/2$. Функция амплитудной модуляции постоянна. Приведена функция фазовой модуляции при $\delta_0=\delta_1=0$, δ_2=0.25 (существенно нелинейное пересечение термов – сплошная линия). Модель $k=+1/2$. Функция амплитудной модуляции постоянна. Функция фазовой модуляции приведена при $\delta_0=\delta_1=0$, δ_2=2 (другой тип существенно нелинейного пересечения термов – пунктирная линия).

3. Структура решений

Решение биконфлюентного уравнения Гойна в рядах по степеням z легко построить прямой подстановкой ряда

$$u = z^{\mu} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{15}$$

в исходное уравнение (2) (или (1)). Для показателя μ получаются два значения: 0 и $1-B$. При начальном условии $u(0)=1$ имеем $\mu=0$ и для коэффициентов ряда получается следующее трехчленное рекуррентное соотношение:

$$\begin{aligned} &a_n n[(n-1)+B] + a_{n-1}[(n-1)A + D] + a_{n-2}[(n-2)C + E) = 0, \quad n \ge 0, \\ &a_{-2} = a_{-1} = 0, \quad a_0 = 1, \quad a_1 = -D/B. \end{aligned} \tag{16}$$

Легко проверить, что ряд при параметрах (7), (8) никогда не обрывается, т.е. полиномиальные решения невозможны. Кроме того, хотя ряд (15)-(16) и сходится всюду, в вычислениях его можно применять лишь в некоторой окрестности начала координат. Для больших же $z \gg 1$ целесообразно пользоваться асимптотическим решением, легко получающимся из (2). Действительно, при $z \to \infty$ имеем:

$$u_{zz} + Czu_z \approx 0,$$

и, следовательно,

$$u \approx c_1 + c_2 \int_0^z e^{-\frac{Cz^2}{2}} dz. \tag{17}$$

Обратим внимание, однако, что в одном из физически наиболее интересных случаев, а именно, при существенно нелинейном пересечении термов (12) (при $\delta_0=0$)

$$\delta_t(t) = 2\delta_2 t^3, \tag{18}$$

можно построить точное аналитическое решение задачи в виде всюду сходящегося ряда по вырожденным гипергеометрическим функциям. Для этого требуется выбрать параметры $\alpha_{0,1,2}$ (см.(7)) таким образом, чтобы параметр A был нулем.

Согласно [1], это разложение имеет следующий вид:

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{k}^n y_n(z), \tag{19}$$

где

$$y_n(z) = \frac{4^n \Gamma(2\tilde{c}-1)}{n!\Gamma(2\tilde{c}-1+n)} \left(-\frac{C}{2}\right)^{n/2} z^n G_n \cdot {}_2F_2\left(\tilde{a}+\frac{n}{2}, 1; \tilde{c}+\frac{n}{2}, 1+\frac{n}{2}; -\frac{C}{2}z^2\right), \tag{20}$$

$$G_n = \prod_{m=1}^{n} {}_4F_3\left(\tilde{a}+\frac{m-1}{2}, \tilde{c}+\frac{m-2}{2}, \frac{m}{2}, 1; \tilde{c}+\frac{m-1}{2}, \tilde{a}+\frac{m}{2}, \frac{1+m}{2}; 1\right), \tag{21}$$

а новые параметры $\tilde{a}, \tilde{c}$ и $\tilde{k}$ определены по соотношениям

$$\tilde{a} = \frac{E}{2C}, \quad \tilde{c} = \frac{B+1}{2}, \quad \tilde{k} = -\frac{D}{4}\sqrt{\frac{-2}{C}}. \tag{22}$$

Примечательно, что для одного независимого решения получается $\tilde{a} = \tilde{c}$, а для другого – $\tilde{a} = 1$. Следовательно, в обоих случаях обобщенная гипергеометрическая функция ${}_2F_2$ в формуле (20) сводится к обычной вырожденной гипергеометрической функции. Кроме того, при этом упрощаются и коэффициенты (21) разложения, так как функции ${}_4F_3$ переходят в ${}_3F_2$. Таким образом, окончательно, общее решение исходной задачи представляется рядами по вырожденным гипергеометрическим функциям.

Графики населенностей уровней $P_{1,2}=|a_{1,2}(z=t^2)|^2$ приведены на рис.3.

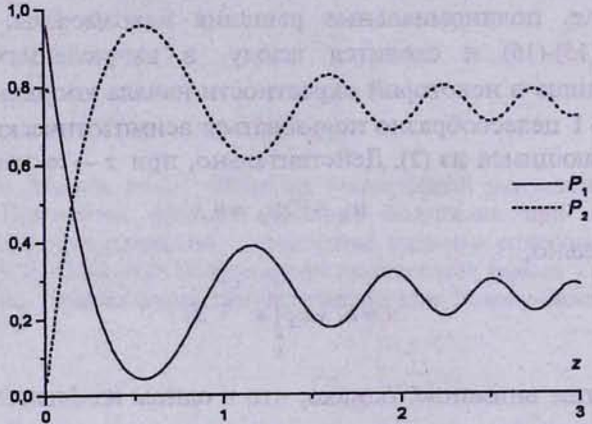

Рис.3. Населенности уровней $P_{1,2}=|a_{1,2}(z=t^2)|^2$ для существенно нелинейного пересечения термов: $\delta_t(t) = 2\delta_2 t^3$, $\delta_0=\delta_1=0$, $\delta_2=5$, $U_0^*=1$.

4. Заключение

Таким образом, мы получили пять классов решений двухуровневой задачи, выражаемых в биконфлюентных функциях Гойна. Три из этих классов представляют собой обобщения классов Ландау-Зинера, Никитина и Кротерса. Два других класса содержат модели с принципиально отличными физическими свойствами. Как мы убедились, данные классы описывают суб- и суперлинейные процессы пересечения термов, а также существенно нелинейные пересечения и процессы с тремя точками пересечения. Наконец, мы построили общее решение исходной двухуровневой задачи для кубического пересечения термов в виде всюду сходящихся рядов по вырожденным гипергеометрическим функциям.

Работа выполнена при поддержке грантов Международного Научно-Технического Центра (No.A-215-99) и Армянского Национального Фонда Науки и Образования.

ЛИТЕРАТУРА

1. **A.Ronveaux.** Heun's Differential Equations. London, Oxford University Press, 1995.
2. **E.L.Ince.** Ordinary Differential Equations. New York, Dover, 1956.
3. **A.M.Ишханян.** Известия НАН Армении, Физика, **36**, 3 (2001); **A.M.Ishkhanyan.** J. Phys. A, **30**, 450 (1997); **A.M.Ishkhanyan.** Optics Communications, **176**, 155 (2000); **A.M.Ishkhanyan.** J. Phys. A, **33**, 5539 (2000).
4. **L.D.Landau.** Phys. Z. Sowjetunion, **2**, 46 (1932); **C. Zener.** Proc. Roy. Soc. (London), ser. A, **137**, 696 (1932).
5. **E.E.Nikitin, S.Ya.Umanski.** Theory of Slow Atomic Collisions. Berlin, Springer-Verlag, 1984.
6. **D.S.F.Crothers.** J. Phys. B: Atom. Molec. Phys., **11**, 1025 (1978).
7. **B.Leaute, G.Marcilhacy.** J. Phys. A, **19**, 3527 (1986).
8. **N.V.Vitanov, K.-A.Suominen.** Phys. Rev. A, 59, 4580 (1999).

ԵՐԿՄԱԿԱՐԴԱԿ ԽՆԴՐԻ ՆՈՐ ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐ.
II. ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐ ՀՈՅՆԻ ԵՐԿՊԱՏԻԿ ԱՅԼԱՍԵՐՎԱԾ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐՈՎ

Վ.Ռ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, Ա.Մ. ԻՇԽԱՆՅԱՆ

Դիտարկված է երկմակարդակ խնդրի բերումը Հոյնի երկպատիկ այլասերված հավասարմանը, որն իրենից ներկայացնում է այլասերված հիպերերկրաչափական հավասարման բնական ընդհանրացումը: Նշված է Լանդաու-Զիների, Նիկիտինի և Քրոթերսի մոդելների դասերի համար երկմակարդակ խնդրի լուծումների ընդհանրացումը և այլընտրանքային ներկայացումը արտահայտված Հոյնի երկպատիկ այլասերված ֆունկցիաներով: Ցույց է տրված, որ երկմակարդակ մոդելները, որոնցում դաշտի ամպլիտուդը հաստատուն է, իսկ ապալարքը փոփոխվում է որպես $\delta_0 t+\delta_2 t^3$ կամ $\sim t^{1/3}$ (թերմերի վեր- և ենթագծային և էապես ոչ-գծային հատումներ), նկարագրվում են Հոյնի երկպատիկ այլասերված ֆունկցիաներով:

NEW SOLUTIONS OF THE TWO-LEVEL PROBLEM.
II. SOLUTIONS IN TERMS OF BICONFLUENT HEUN .FUNCTIONS

V.R. GHAZARYAN, A.M. ISHKHANYAN

The reduction of the two-level problem to the biconfluent Heun equation which is a natural generalization of the confluent hypergeometric equation, is considered. A generalization and alternative representation of the solutions of the two-level problems for the models of the Landau-Zener, Nikitin and Crothers classes in terms of biconfluent Heun functions is mentioned. It is shown that the two-level models where the field amplitude is constant and the detuning varies as $\delta_0 t+\delta_2 t^3$ or $\sim t^{1/3}$ (super- and sublinear and essentially nonlinear level crossings) are described in terms of biconfluent Heun functions.