

УДК 539.182

НОВЫЕ РЕШЕНИЯ ДВУХУРОВНЕВОЙ ЗАДАЧИ. I. РЕШЕНИЯ В ВЫРОЖДЕННЫХ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ

А.М. ИШХАНЫН

Инженерный центр НАН Армении

(Поступила в редакцию 30 июля 2000 г.)

Рассмотрена проблема интегрируемости двухуровневой задачи путем сведения временных уравнений Шредингера к некоторому линейному дифференциальному уравнению второго порядка, имеющему аналитическое решение. Найден новый класс моделей, интегрируемых в вырожденных гипергеометрических функциях.

1. Введение

Аналитические модели двухуровневой задачи исторически сыграли неоценимую роль в изучении ряда важных физических явлений во многих областях квантовой физики. Большое число подобных моделей было найдено и с успехом применено в теории атомных столкновений [1-2], взаимодействия лазерного излучения с атомами [3-4], магнитного резонанса [5], молекулярной физики [6], ядерной физике [7] и т. д.

Однако в настоящее время хорошо установлено, что эти многочисленные решения не совсем независимы (хотя, как правило, были найдены независимыми путями). Оказалось, что интегрируемые модели могут быть объединены в определенные бесконечные классы [8-10], и уже выявлено множество независимых базисных решений — генераторов классов, порождающих все известные к настоящему времени точные решения [11-13]. При этом был разработан простой, но вместе с тем мощный систематический подход, позволивший не только выявить генераторы классов, к которым принадлежат уже известные решения, но и найти большое число новых базисных решений, обладающих к тому же интересными физическими свойствами. Метод основан на сведении временных уравнений Шредингера к некоторому линейному дифференциальному уравнению второго порядка, имеющему известное аналитическое решение.

В настоящий момент, однако, подход только обрел окончатель-

ную форму и имеются лишь единичные его применения. Это обстоятельство и, вообще, анализ возможностей метода позволяет надеяться на дальнейший успех в поиске новых интегрируемых классов при применении подхода к различным стандартным уравнениям. Поскольку в настоящее время активно исследуется целый ряд нетрадиционных физических ситуаций (таких, например, как супер- и сублинейные пересечения термов [14], процессы с более чем одной точкой пересечения [15], пересечения с двумя масштабами времени [16], периодическое пересечение термов [17] и т. д.), для которых пока не имеется подходящих точных аналитических моделей, то подобный поиск, очевидно, представляет большой интерес. В настоящей серии работ мы проводим подобный поиск, применяя указанный метод к ряду известных уравнений [18,19].

Следует отметить, что все известные к настоящему времени нетривиальные точные модели двухуровневой задачи с математической точки зрения можно разделить на два больших подкласса: решения в гипергеометрических функциях Гаусса и решения в вырожденных гипергеометрических функциях. И это не случайно. Важность гипергеометрического уравнения Гаусса обусловлена следующей теоремой, известной из теории дифференциальных уравнений: *любое однородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка, особые точки которого, включая бесконечно удаленную, регулярны, причем их число не превосходит трех, может быть преобразовано в гипергеометрическое уравнение* [20]. Вырожденное же гипергеометрическое уравнение является наиболее общим уравнением, имеющим две особые точки, одна из которых (в начале координат) регулярна, а другая (на бесконечности) иррегулярна с наименьшим возможным рангом иррегулярности 1.

Поэтому мы сначала вновь рассматриваем вопрос об интегрируемости двухуровневой задачи в гипергеометрических и вырожденных гипергеометрических функциях. Как мы убедимся, можно найти ряд новых решений, обладающих интересными особенностями. Далее мы рассматриваем сводимость двухуровневой задачи к некоторым другим известным уравнениям, таким, как, например, обычное и вырожденные уравнения Гойна [18]. Наконец, мы анализируем определенные обобщения перечисленных уравнений.

Перейдем теперь к применению метода [12-13] к вырожденному гипергеометрическому уравнению. Мы получим новый класс интегрируемых моделей, являющихся переходными между известными моделями Ландау-Зенера [1] и Демкова-Кунике [16].

2. Новые решения в вырожденных гипергеометрических функциях

Запишем, как обычно, полуклассическую двухуровневую задачу (в приближении вращающейся волны) в виде уравнения второго по-

рядка относительно амплитуды населенности первого уровня a_1 [4]:

$$a_{1u} + (i\delta_t - U_t/U)a_{1l} + U^2 a_1 = 0, \quad (1)$$

где функции амплитудной и фазовой модуляций $U(t)$, $\delta(t)$ предполагаются действительными ($U(t) > 0$).

Мы ищем базисные (вообще говоря, комплексные) функции $U^*(z)$, $\delta_z^*(z)$, для которых вырожденное гипергеометрическое уравнение [18-20], преобразованное сначала (следуя нашей предыдущей работе [11]) заменой $z \rightarrow sz$, где s — некоторая комплексная постоянная:

$$u_{zz} + \left(\frac{b}{z} - s\right)u_z - \frac{as}{z}u = 0, \quad (2)$$

потом заменой зависимой переменной $u = \varphi(z)a_1(z)$, совпадет с уравнением (1), переписанным через переменную z .

Тогда решение двухуровневой задачи (1) для всех функций

$$U(t) = U^*(z) \frac{dz}{dt}, \quad \delta_t(t) = \delta_z^*(z) \frac{dz}{dt}, \quad (3)$$

с произвольной $z(t)$ будет определяться по формуле

$$a_1 = {}_1F_1(a, b, sz) / \varphi(z). \quad (4)$$

Таким образом, наша задача состоит в том, чтобы найти такие базисные решения, которые способны генерировать действительные функции амплитудной и фазовой модуляций $U(t)$, $\delta(t)$ при применении (3).

Легко проверить, что для того, чтобы функции $U^*(z)$, $\delta_z^*(z)$ были базисными решениями, они должны удовлетворять следующей системе уравнений:

$$i\delta_z^* - \frac{U_z^*}{U^*} = 2\frac{\varphi_z}{\varphi} + f, \quad U^{*2} = \frac{\varphi_{zz}}{\varphi} + f\frac{\varphi_z}{\varphi} + g, \quad (5)$$

где f и g суть коэффициенты вырожденного гипергеометрического уравнения (2).

Согласно подходу [13], удобной стартовой точкой в поиске новых базисных решений является выбор определенной функции $\varphi(z)$. Мы рассматриваем здесь выбор φ , заданный уравнением

$$\frac{\varphi_z}{\varphi} = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{z} + \frac{\alpha_2}{z+p} \quad (6)$$

(где α_i и p — комплексные постоянные), что соответствует следующему явному виду этого фактора:

$$\varphi = \varphi_0^* e^{\alpha_0 z} z^{\alpha_1} (z+p)^{\alpha_2}. \quad (7)$$

Тогда из (5) сразу следует, что функции $U^*(z)$, $\delta_z^*(z)$ имеют вид

$$\delta_z^* = \delta_0 + \frac{\delta_1}{z} + \frac{\delta_2}{z+p}, \quad (8)$$

$$U^* = U_0^* z^{k_1} (z+p)^{k_2}. \quad (9)$$

При этом из первого уравнения (5) следует

$$\alpha_2 = \frac{i\delta_2 - k_2}{2}, \quad (10)$$

а также

$$\begin{aligned} s &= -i\delta_0 + 2\alpha_0, \\ b &= i\delta_1 - k_1 - 2\alpha_1. \end{aligned} \quad (11)$$

Второе же уравнение системы (5) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} Q(z) &= \alpha_0(\alpha_0 - s)z^2(z+p)^2 + \alpha_1(\alpha_1 - 1 + b)(z+p)^2 + \alpha_2(\alpha_2 - 1)z^2 + (2\alpha_0\alpha_1 + \\ &+ \alpha_0b - \alpha_1s - as)z(z+p)^2 + \alpha_2(2\alpha_0 - s)z^2(z+p) + \alpha_2(2\alpha_1 + b)z(z+p), \end{aligned} \quad (12)$$

где введено обозначение

$$Q(z) = U_0^{*2} z^{2k_1+2} (z+p)^{2k_2+2}. \quad (13)$$

Из уравнения (12) непосредственно видно, что оно может быть удовлетворено только, если $k_1 = -1, -1/2, 0, 1/2, 1$ и $-2 \leq k_1 + k_2 \leq 0$. Кроме того, если $k_2 \neq -1$, то $Q(z)$ в точке $z = -p$ равно нулю, для чего должно быть $\alpha_2(\alpha_2 - 1) = 0$. Корень $\alpha_2 = 1$ отпадает, поскольку тогда должно быть $k_2 = -2$, а корню $\alpha_2 = 0$ соответствует $k_2 = \delta_2 = 0$. Этот последний случай, когда всюду, в факторе φ (см. (7)) и в выражениях (8) для $U^*(z)$, $\delta_z^*(z)$, отпадает множитель $(z+p)$, изучен в работе [11]. Следовательно, для нахождения новых интегрируемых случаев полагаем $k_2 = -1$. Соответственно, окончательно имеем

$$Q(z) = U_0^{*2} z^{2k_1+2}, \quad (14)$$

$$\alpha_2 = \frac{i\delta_2 + 1}{2}. \quad (15)$$

Теперь заметим, что правая часть алгебраического уравнения (12) представляет собой полином четвертой степени относительно z . Для определения этого полинома требуется задать 5 уравнений относительно коэффициентов полинома. Три из этих уравнений определяют имеющиеся у нас свободные параметры α_0, α_1 и a :

$$\alpha_0^2 - \alpha_0 i \delta_0 + \frac{Q^{(IV)}(0)}{4!} = 0, \quad (16)$$

$$\alpha_1^2 - \alpha_1(i\delta_1 - 1 - k_1) + \frac{Q(0)}{p^2} = 0, \quad (17)$$

$$a = \frac{1}{s} \left[-\frac{Q^{(III)}(0)}{3!} + 2p \frac{Q^{(IV)}(0)}{4!} + i\delta_0 \alpha_2 + (2\alpha_0 \alpha_1 + \alpha_0 b - \alpha_1 s) \right]. \quad (18)$$

А остальные два представляют собой конфликтные уравнения, накладывающие дополнительные связи и/или ограничения на входные параметры задачи $\delta_{1,2,3}$, p , k_1 , U_0 . Эти дополнительные связи имеют вид

$$k_1 \delta_2 = \delta_1 - p \delta_0, \quad (19)$$

$$\frac{1 + \delta_2^2}{4} = -U_0^{*2} (-p)^{2k_1}. \quad (20)$$

Видно, что трудность представляет лишь последнее уравнение: его не всегда можно удовлетворить. Проанализируем это уравнение.

Пусть p — действительный положительный параметр. Тогда из последнего уравнения следует, что если $k_1 = -1, 0$ или $+1$, то параметр U_0 должен быть чисто мнимым. Но тогда уравнения (9) и (3) не определяют действительную положительную функцию амплитудной модуляции $U(t)$. Если же $k_1 = -1/2, 1/2$, то $U(t)$ — действительная функция только, если U_0^{*2} — действительный положительный параметр и $z(t) \geq 0$. Следовательно, должно быть

$$k_1 = -1/2, 1/2, \quad p > 0, \quad z(t) \geq 0. \quad (21)$$

Аналогично, действительные функции амплитудной и фазовой модуляций $U(t)$, $\delta_i(t)$ можно построить (нужно положить $U_0^* = -iU_0$) и когда

$$k_1 = -1/2, 1/2, \quad p < 0, \quad z(t) \leq 0. \quad (22)$$

Итак, $k_1 = -1/2, 1/2$, а параметр p и $z(t)$ должны быть действительными и иметь одинаковый знак. Тогда, объединив оба случая (21) и (22), уравнение (20) можно записать в следующем универсальном виде:

$$\frac{1 + \delta_2^2}{4} = U_0^2 |p|^{2k_1}. \quad (23)$$

Таким образом, формулы (8-9), при условии (21) или (22), задают два трехпараметрических (из-за связей (19) и (23)) класса функций амплитудной и фазовой модуляций $U(t)$, $\delta_i(t)$:

$$U(t) = U_0 \frac{|z|^{k_1}}{z + p} \frac{dz}{dt}, \quad \delta_i(t) = \left(\delta_0 + \frac{\delta_1}{z} + \frac{\delta_2}{z + p} \right) \frac{dz}{dt}, \quad (24)$$

для которых решение исходной двухуровневой задачи (1) выражается через вырожденную гипергеометрическую функцию. Первый из этих классов был получен в [11], а второй класс новый.

Конечное решение двухуровневой задачи определяется формулами (4),(7),(10-11) и (14-20):

$$a_1 = \left(1 + \frac{z}{p}\right)^{-(i\delta_2+1)/2} {}_1F_1\left(-\frac{i\delta_2+1}{2} - \frac{i}{\delta_0} \frac{Q^{(III)}(0)}{3!}, i\delta_1 - k_1, -i\delta_0 z\right). \quad (25)$$

Обсудим коротко характер функций амплитудной и фазовой модуляций (24).

3. Функции амплитудной и фазовой модуляций

Рассмотрим замену независимой переменной $z=z(t)$, заданную формулой

$$z = \frac{z_0}{2} \left(1 + \tanh \frac{t-t_0}{\tau}\right), \quad (26)$$

переводящей ось t в отрезок $[0, z_0]$.

Соответствующая функция амплитудной модуляции $U(t)$ представляет собой колоколообразную ограниченную функцию, имеющую конечную площадь. Получающаяся при этом функция фазовой модуляции $\delta_f(t)$ для различных наборов входных параметров задачи приведена на рис.1-3. Как видно, полученные классы описывают процессы как непересечения (рис.1), так и пересечения термов (рис.2-3). При этом

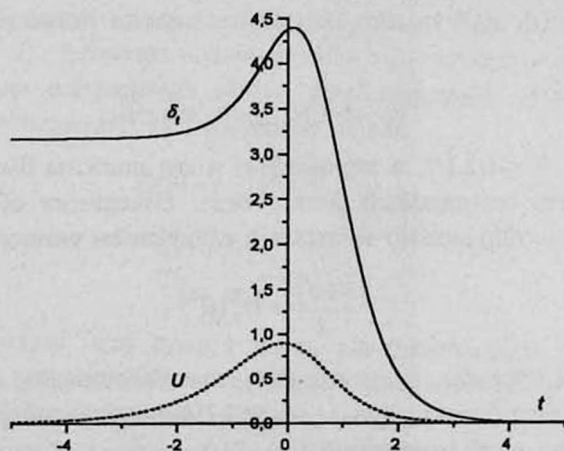


Рис.1. Функции амплитудной (пунктирная линия) и фазовой (сплошная линия) модуляций: $k_1 = -1/2$, $p=1$, $\tau=1$, $t_0=0.5$, $z_0=1$, $z_0=3$, $U_0=1.5$.

интересной особенностью данных функций является то, что, как видно из рис.3, существуют определенные значения параметров, когда функция фазовой модуляции дважды пересекает нуль. Таким образом, данные классы описывают процессы пересечения термов с двумя точками пересечения. Важно еще и то, что функция фазовой модуляции ограничена, в отличие от случая Ландау-Зенера.

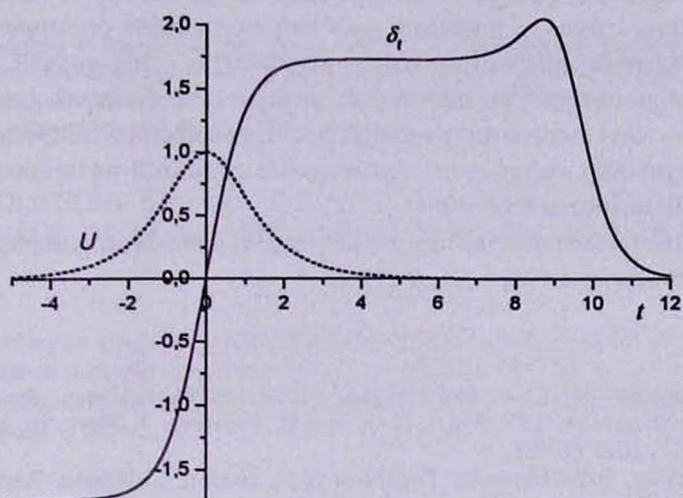


Рис.2. Функции амплитудной (пунктирная линия) и фазовой (сплошная линия) модуляций: $k_1 = -1/2$, $p = 1$, $r = 1$, $t_0 = 9.2$, $z_0 = 10^8$, $\delta_0 = 2 \cdot 10^{-8}$, $U_0 = 1$.

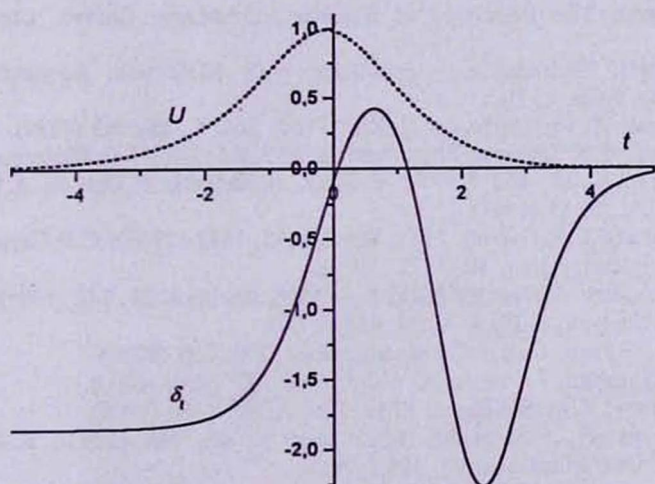


Рис.3. Функции амплитудной (пунктирная линия) и фазовой (сплошная линия) модуляций: $k_1 = -1/2$, $p = 1$, $t_0 = 2.2$, $r = 1$, $z_0 = 100$, $\delta_0 = -0.05$, $U_0 = 1$.

4. Заключение

Таким образом, мы провели поиск новых аналитически интегрируемых случаев двухуровневой задачи и нашли новый класс решений в вырожденных гипергеометрических функциях. Этот класс и его аналог [11] – единственные в своем роде, которые описывают процессы пересечения термов с двумя точками пересечения. Важно еще, что для данных классов функция амплитудной модуляции на бесконечности обращается в нуль, а функция фазовой модуляции ограничена, то есть данные классы физически менее вырождены, чем случай Ландау-Зенера, когда амплитуда постоянна, а функция фазовой модуляции на бесконечности неограниченно растет. Приложение полученных решений к изучению конкретных физических ситуаций предполагается провести в ближайшем будущем.

Работа выполнена при поддержке гранта Международного научно-технического центра No. A-215-99.

ЛИТЕРАТУРА

1. L.D.Landau. Phys. Z. Sowjetunion, 2, 46 (1932); C.Zener. Proc. Roy. Soc. (London), ser. A, 137, 696 (1932); D.S.F. Crothers. J. Phys. B: Atom. Molec. Phys., 11, 1025 (1978).
2. E.E.Nikitin, S.Ya.Umanski. Theory of Slow Atomic Collisions. Berlin, Springer-Verlag, 1984.
3. N.Rosen, C.Zener. Phys. Rev., 40, 502 (1932); A.Bambini, P.R.Berman. Phys. Rev. A, 23, 2496 (1981); Ю.Н.Демков, М.Кунике. Вестник Ленингр. ун-та, Физ., Хим., 16, 39 (1969).
4. B.W.Shore. The Theory of Coherent Atomic Excitation, New York, Wiley, 1990; L.Allen, J.H.Eberly. Optical Resonance and Two-Level Atoms. New York, Wiley, 1975.
5. A.Abragam. The Principles of Nuclear Magnetism, Oxford, Clarendon Press, 1961.
6. M.S.Child. Semiclassical Mechanics with Molecular Applications, Oxford, Clarendon Press, 1991.
7. B.Imanishi, W. von Oertzen, H.Voit. Phys. Rev. C, 35, 359 (1987).
8. J.B.Delos, W.R.Thorson, Phys. Rev. A, 6, 728 (1972); T.R.Dinterman, J.B.Delos. Phys. Rev. A, 15, 463 (1977); V.Boffa, S.Bollanti, G.Dattoli, A.Torre. Nuovo Cimento B, 99, 53 (1987).
9. F.T.Hioe and C.E.Carroll. Phys. Rev. A, 32, 1541 (1985); C.E.Carroll, F.T.Hioe. J.Phys. A: Math. Gen., 19, 3579 (1986).
10. А.М.Ишханян. Известия НАН Армении, Физика, 31, 148 (1996).
11. А.М.Ishkhanyan. J. Phys. A, 30, 450 (1997).
12. А.М.Ishkhanyan. Optics Communications, 176, 155 (2000).
13. А.М.Ishkhanyan. J. Physics A: Math. Gen., 33, 5539 (2000).
14. N.V.Vitanov, K.-A.Suominen. Phys. Rev. A, 59, 4580 (1999).
15. B.M.Garraway, S.Stenholm. Phys. Rev. A, 45, 364 (1992); K.-A. Suominen. Optics Communications, 93, 126 (1992).
16. K.-A.Suominen, B.M.Garraway. Phys. Rev. A, 45, 374 (1992).
17. B.M.Garraway, N.V.Vitanov. Phys. Rev. A, 55, 4418 (1997).
18. Э.Камке. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., Наука, 1976.

19. A. Erdelyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F.G. Tricomi. Higher Transcendental Functions, New York, McGraw-Hill, 1953.
20. Ф. Олвер. Введение в асимптотические методы и специальные функции. М., Наука, 1978.

ԵՐԿՍԱԿԱՐԴԱԿ ԽՆԴՐԻ ՆՈՐ ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐ. I. ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐ ԱՅԼԱՍԵՐՎԱԾ ՀԻՊԵՐԵՐԿՐԱԶԱՓԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐՈՎ

Ա.Մ. ԻՇԽԱՆՅԱՆ

Դիտարկված է երկմակարդակ խնդրի ինտեգրման հարցը Շրյոդինգերի ժամանակային հավասարումները որեւէ անալիտիկ լուծում ունեցող երկրորդ կարգի գծային դիֆերենցիալ հավասարման քերելու միջոցով: Գտնված է այլասերված հիպերերկրաչափական ֆունկցիաներով ինտեգրվող մոդելների մոր դաս:

NEW SOLUTIONS OF THE TWO-LEVEL PROBLEM. I. SOLUTIONS IN TERMS OF CONFLUENT HYPERGEOMETRIC FUNCTIONS

A.M. ISHKHANYAN

The problem on integrability of the two-level problem is considered by reduction of the time-dependent Schrödinger equations to some analytically integrable second-order linear differential equation. A new class of models integrable in terms of confluent hypergeometric functions is found.