

УДК 530.145

ФЕРМИОННЫЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ НА ГЕКСАГОНАЛЬНОЙ РЕШЕТКЕ МАНХЭТТЕНА

Ш.А. ХАЧАТРЯН

Ереванский физический институт

(Поступила в редакцию 20 ноября 1999 г.)

Рассмотрена фермионная модель на гексагональной решетке Манхэттена. С помощью формализма трансфер-матриц получен спектр для возбуждений около состояния с нулевой энергией. Переход к непрерывному пределу приводит к фермионам с центральным зарядом -2 и со спином $(0,1)$.

Как известно, трехмерная модель Изинга эквивалентна фермионной струнной теории на двумерных случайных поверхностях [1-3]. В работе [5] фермионная система была введена на сконструированных на этих поверхностях решетках Манхэттена (РМ) в присутствии внешнего $SU(2)$ калибровочного поля. В непосредственном непрерывном пределе действие для этой системы совпадает с двумерным действием Дирака. Рассмотрение критических состояний упрощенной модели с $U(1)$ калибровочным полем на квадратичной решетке Манхэттена [6], при некотором выборе параметров теории, показывает, что элементарные возбуждения в непрерывном пределе можно интерпретировать как фермионы с центральным зарядом $c = -2$ и со спином $(0,1)$ (подробнее см. [6]).

В настоящей работе рассматривается гексагональная РМ, которая в пределе нулевой постоянной решетки есть поверхность с периодической кривизной. Благодаря структуре РМ можно использовать методы, предложенные в [6]. Спектр для возбуждений имеет сингулярность, но около точки, где отсутствует щель, устремление к непрерывному пределу, при соответствующем выборе параметров, опять приводит к $(0,1)$ фермионам с центральным зарядом -2 . Это и будет показано в настоящей работе.

Итак, мы рассматриваем фермионную систему с неэрмитовым гамильтонианом

$$H(t_f, \Phi) = \sum_{i,n} U_{n,\mu} t_{i,i+1} c_i^+(n) c_{i+1}(n) + \sum_{i,n,\mu} U_{n,\mu} t_{i,i+4} c_i^+(n) c_{i+4}(n+\mu) + m \sum_{i,n} c_i^+(n) c_i(n) \quad (1)$$

Для состояния с нулевой энергией имеем соотношение

$$m^6 + 2(\omega^{-6}t_*^3 + 2mt_*t^2(\cos 2k_x + 2\cos \sqrt{3}k_y))^2 - (\omega^2t^2 - \omega^{-2}t_*^2) = 0. \quad (4)$$

Исследуем элементарные возбуждения около этого состояния с помощью статистической суммы, написанной как интеграл по грассмановым полям:

$$Z = \int \prod dc, d\bar{c} e^{-H(c, \bar{c})}. \quad (5)$$

Уравнение (3) характеризует для этих возбуждений критическую линию фазовых переходов в пространстве параметров, и около нее можно попытаться осуществить переход к непрерывному пределу, что мы и сделаем, рассматривая статистическую сумму (5) как производящий функционал в двумерном евклидовом пространстве-времени с действием (1).

С помощью трансфер-матриц мы попытаемся построить гамильтониан на одномерной решетке для этой (1+1) квантовой теории поля. Будем различать два типа возбуждений, расположенных на четных и нечетных вершинах цепочки (рис.). Трансфер-матрицу представим как произведение четырех операторов, осуществляющих переходы между состояниями, которые отмечены на рисунке. При выборе когерентных состояний, последуем примеру [6], используя обычное и дырочное нормальное упорядочение для частиц на четных и нечетных вершинах соответственно. Для нахождения спектра легче действовать в импульсном пространстве:

$$Z = \text{tr} T^{N_2/2}, \quad T = \prod_{i=1}^4 T_i, \quad T = \prod_p D e^{-H_p}. \quad (6)$$

Структура трансфер-матриц позволяет искать гамильтониан как представление алгебр $\text{sl}(2)$:

$$H_p = \varepsilon S + \mu(c_{1p}^+ c_{1p} + c_{2p}^+ c_{2p}),$$

$$S_1 = c_1^+ c_2 - c_2^+ c_1, \quad S_2 = c_1^+ c_2 + c_2^+ c_1, \quad S_3 = c_1^+ c_1 - c_2^+ c_2, \quad S_0 = I. \quad (7)$$

Дальнейшие вычисления будут сделаны для случая $m = 1$, а к общему случаю можно вернуться перенормировкой $t \rightarrow t/m$.

После вычислений получаем:

$$D = 4t^4 t_*^2, \quad \mu = 0, \quad \varepsilon_0 = \ln(\cos p)^2, \quad (8)$$

$$\text{ch}(\varepsilon/2) = \frac{1 + \Delta + 2t^2 t_* \cos 2p}{4 |\cos p|}, \quad \varepsilon = |\varepsilon|, \quad \Delta = 2\omega^{-6} t_*^3 - (\omega^2 t^2 - \omega^{-4} t_*^2)^3.$$

Отметим, что этот результат можно было получить и из выражения интеграла по траекториям (5) как произведение детерминантов: $z = \prod_k \det H(k)$, осуществляя произведение по k_y и сравнивая с (7,8), с помощью тригонометрической формулы

$$\operatorname{ch} N\alpha + (-1)^{N-1} \operatorname{ch} N\beta = 2^{N-1} \prod_{n=0}^{N-1} (\operatorname{ch} \alpha + \operatorname{ch}(\beta - i2\pi \frac{n}{N})). \quad (9)$$

Из дисперсионных уравнений (8) и

$$E_p = -\varepsilon_0(p) + E_{\pm}(p), \quad E_{\pm} = -\mu \pm \varepsilon(p) \quad (10)$$

видно, что в спектре присутствуют две зоны. Полная энергия вакуумного состояния в непрерывном пределе есть

$$E_0 = -\sum \varepsilon_0(p) = -N_1 / \pi \int \varepsilon_0(p) dp = 2N_1 \ln 2. \quad (11)$$

Здесь мы рассматриваем предел $t \rightarrow \infty$ (полностью упакованная фаза) при внешнем поле, одновременно устремляя $\Phi \rightarrow 0$, двигаясь по критической кривой:

$$\sin^2 \Phi / 2 = 1/2t^3, \quad t = t^* = t.. \quad (12)$$

Тогда из уравнения (8) получаем

$$\operatorname{ch} \varepsilon / 2 = |\cos p| + 1/(4|\cos p|). \quad (13)$$

В окрестностях точек $p = \pm\pi/3$, где отсутствует щель, спектр линейен: $\varepsilon = \pm 2\sqrt{3}p$.

Таким образом, над основным состоянием, заполненным до уровня Ферми $\varepsilon(\pm\pi/3) = 0$, имеются безмассовые возбуждения, характер которых можно выяснить, написав полную энергию основного состояния с помощью формулы Мак-Лорена для конечных сумм [6,7]:

$$E = \sum \varepsilon_p = N/2\pi \int \varepsilon(p) dp + \pi/6N(\varepsilon'(\pi/3) - \varepsilon'(-\pi/3)) + \dots, \quad (14)$$

и сравнивая с аналогичным выражением для ферми-системы с центральным зарядом c [8]:

$$E = -N\varepsilon - \pi \frac{vc}{6N}. \quad (15)$$

Для нашего случая $v = \varepsilon'(\pm\pi/3)$ — скорость фермионных возбуждений около уровня Ферми, а центральный заряд $c = -2$.

Автор выражает благодарность А.Г.Седракану за идею и полезные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. A.Polyakov. Phys. Lett., B82, 247 (1979).
2. V.Dotsenko, A.Polyakov, in Adv. Stud. In Pure Math., 15 (1987).
3. C.Itzikson. Nucl. Phys., B210, 477 (1982).
4. A.Casher, D.Foerster, R.Winday. Nucl. Phys., B251, 29 (1985).
5. A.Kavalov, A.Sedrakyan. Nucl. Phys., B285 [FS19], 264 (1987).
6. A.Sedrakyan. Nucl. Phys., B554 [FS], 514-536 (1999).
7. B.Duplantier, F.David. Journal of Stat. Phys., 51, 327 (1988).
8. D.Friedan, S.Shenker, E.Martinec. Nucl. Phys., B271, 92 (1986).

ՖԵՐՄԻՈՆԱՅԻՆ ԳՐԳՈՒՄՆԵՐԸ ՄԱՆՀԵԹԵՆԻ ՀԵՔՍԱԳՈՆԱԼ ՑԱՆՑԻ ՎՐԱ

Շ.Ա. ԽԱՇԱՏՐՅԱՆ

Դիտարկված է ֆերմիոնային համակարգ վեցանկյուն Մանհեթենի ցանցի վրա: Տրանսֆեր-մատրիցի կառուցմամբ ստացված է տարրական զրգռումների սպեկտրը զրոյական էներգիայով վիճակների շուրջ: Անընդհատ սահմանի անցումը բերում է (0,1) սպինով և $c = -2$ կենտրոնական լիցքով ֆերմիոնային համակարգի:

FERMIONIC EXCITATIONS ON THE HEXAGONAL MANHATTAN LATTICE

Sh.A. KHACHATRYAN

The fermionic model on the hexagonal ML is considered. By means of the Transfer Matrix approach the spectrum of elementary excitations is found near the state with zero energy. The continuum limit leads to the (0,1) spin fermions with the central charge $c = -2$.