

УДК 531.19

КРИТИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ И КРИТИЧЕСКИЕ ЛИНИИ $Z(4)$ КАЛИБРОВОЧНОЙ МОДЕЛИ ПОТТСА НА ТРЕУГОЛЬНОЙ РЕШЕТКЕ

Р.Г. ГУЛГАЗАРЯН

Ереванский физический институт

(Поступила в редакцию 20 ноября 1999 г.)

Рассмотрена $Z(4)$ калибровочная модель Поттса с одно- и двухплакетным представлением действия на треугольной решетке. Найдены условия, налагаемые на параметры взаимодействия модели, при которых данная модель может быть решена точно. Исследовано поведение модели вблизи критических поверхностей и критических линий. Показано, что данная модель принадлежит к тому же самому классу универсальности, что и модель Изинга со спином $3/2$ на шестиугольной решетке.

Для изучения явления конфайнмента кварков, т.е. невозможности вылетаания свободных кварков из адронной материи, Вильсон предложил рассматривать калибровочные теории на пространственно-временных решетках [1]. Введение решетки фактически представляет собой непертурбативный математический прием, обеспечивающий обрезание ультрафиолетовых расходимостей. Как и любая регуляризация, решеточное обрезание должно быть устранено после перенормировки, устремляя шаг решетки к нулю, при этом наблюдаемые величины должны стремиться к их физическим значениям. Известно, что для того, чтобы перейти к непрерывному пределу решеточной теории, необходимо, чтобы соответствующая статистическая модель имела критическое поведение, т.е. фазовый переход второго рода. Следовательно, желательно заранее знать, является ли соответствующая статистическая модель критической или нет. Существует множество модификаций Вильсоновского действия, среди них действие Банота-Кройтса [2], двухплакетное представление Вильсоновского действия [3], q -позиционная модель Поттса с одно- и двухплакетным представлением действия и т. д. Калибровочная модель с $Z(2)$ глобальной симметрией была исследована Турбаном на квадратной решетке [4]. Ему удалось отобразить ее на модель Изинга со спином $1/2$ и найти точку фазового перехода второго рода. Калибровочные модели с $Z(3)$ глобальной симмет-

рией на квадратной и треугольной решетках были исследованы Аналиняном и Щербаковым [5] методом отображения на модель Изинга со спином 1 на дуальных решетках соответственно. Тот факт, что калибровочные модели могут отображаться на классические спиновые модели, хорошо известен в литературе [6].

В наиболее общем виде $Z(4)$ калибровочная модель Поттса с одно- и двухплакетным представлением действия имеет вид

$$S_{Gauge} = - \sum_{\langle p, p_j \rangle} \sum_{y, z} \bar{\beta}_{yz} \delta_{U_{p_i}, y} \delta_{U_{p_j}, z} - \sum_{p_i} \sum_z \bar{\beta}_z \delta_{U_{p_i}, z}, \quad (1)$$

где первая сумма идет по всем ближайшим соседним плакетам, а вторая – по всем плакетам решетки. Суммирование по индексам y и z идет по всей группе $Z(4)$, а $U_p = \prod_{b \in \partial p} U_b$ обозначает произведение элементов группы $Z(4)$ ($U_b = \exp(ik\pi/2)$, $k = 0, 1, 2, 3$) вокруг плакета p . δ – стандартный символ Кронекера и $\bar{\beta}_{yz}, \bar{\beta}_z$ – параметры взаимодействия.

Используя очевидное тождество для символов Кронекера

$$\delta_{U_{p_i}, 1} + \delta_{U_{p_i}, z_1} + \delta_{U_{p_i}, z_2} + \delta_{U_{p_i}, z_3} = 1,$$

где $z_k \in Z(4)$, $k = 0, 1, 2, 3$ и при условии $\bar{\beta}_{yz} = \bar{\beta}_{zy} = \beta_{yz} \cdot k_b T$, мы можем сократить число независимых параметров и записать действие в виде

$$\begin{aligned} S_{Gauge} = - \sum_{\langle p, p_j \rangle} [& \beta_{11} \delta_{U_{p_i}, 1} \delta_{U_{p_j}, 1} + \beta_{22} \delta_{U_{p_i}, z_1} \delta_{U_{p_j}, z_1} + \beta_{33} \delta_{U_{p_i}, z_2} \delta_{U_{p_j}, z_2} + \\ & + \beta_{12} (\delta_{U_{p_i}, 1} \delta_{U_{p_j}, z_1} + \delta_{U_{p_i}, z_1} \delta_{U_{p_j}, 1}) + \beta_{13} (\delta_{U_{p_i}, 1} \delta_{U_{p_j}, z_2} + \delta_{U_{p_i}, z_2} \delta_{U_{p_j}, 1}) + \\ & + \beta_{23} (\delta_{U_{p_i}, z_1} \delta_{U_{p_j}, z_2} + \delta_{U_{p_i}, z_2} \delta_{U_{p_j}, z_1}) + \sum_{p_i} (\beta_1 \delta_{U_{p_i}, 1} + \beta_2 \delta_{U_{p_i}, z_1} + \beta_3 \delta_{U_{p_i}, z_2})]. \end{aligned} \quad (2)$$

Статистическая сумма калибровочной модели может быть записана в виде суммы по всем конфигурациям полей $\{U\}$ от Больцмановских весов:

$$Z_{Gauge} = \sum_{\{U\}} \exp[-S_{Gauge}]. \quad (3)$$

Для того, чтобы отобразить нашу калибровочную модель на модель Изинга со спином $3/2$, введем новые спиновые переменные S_i в узлах дуальной решетки согласно очевидным тождествам

$$\begin{aligned} S_i &= \frac{1}{2} (\delta_{U_{p_i}, z_0} - \delta_{U_{p_i}, z_1}) + \frac{3}{2} (\delta_{U_{p_i}, z_2} - \delta_{U_{p_i}, z_3}), \\ S_i^2 &= \frac{1}{4} (\delta_{U_{p_i}, z_0} + \delta_{U_{p_i}, z_1}) + \frac{9}{4} (\delta_{U_{p_i}, z_2} + \delta_{U_{p_i}, z_3}), \\ S_i^3 &= \frac{1}{8} (\delta_{U_{p_i}, z_0} - \delta_{U_{p_i}, z_1}) + \frac{27}{8} (\delta_{U_{p_i}, z_2} - \delta_{U_{p_i}, z_3}). \end{aligned} \quad (4)$$

В терминах этих спиновых переменных действие примет вид

$$S_{Spin} = - \sum_{\langle ij \rangle} [JS_i S_j + KS_i^2 S_j^2 + LS_i^3 S_j^3 + \frac{M}{2} (S_i S_j^3 + S_j S_i^3) + \frac{M_1}{2} (S_i S_j^2 + S_j S_i^2) + \frac{M_2}{2} (S_i^2 S_j^3 + S_j^2 S_i^3)] - \sum_i (h S_i - \Delta S_i^2 + h_3 S_i^3), \quad (5)$$

где $J, K, L, M, M_1, M_2, h, h_3$ и Δ являются линейными комбинациями калибровочных параметров β_{ik} . Действие (5) совпадает с гамильтонианом модели Изинга со спином 3/2, умноженным на $-1/k_b T$. Но гамильтониан модели Изинга со спином 3/2, описывающий свойства магнетиков, очевидно, должен быть инвариантным относительно преобразования $S_i \rightarrow -S_i$. Для этого на параметры действия (5) нужно наложить условия $h_1 = h_3 = M_1 = M_2 = 0$, ограничивающие число независимых параметров β_{ik} . Таким образом, статистическая сумма калибровочной модели (3) на треугольной решетке, с точностью до несущественного постоянного множителя, совпадает со статистической суммой модели Изинга со спином 3/2 на шестиугольной решетке:

$$Z_{Gauge} \propto Z_{Spin}^{Dual}, \quad Z_{Spin}^{Dual} = \sum_{\{S\}} \exp[-S_{Spin}].$$

Модель Изинга со спином 3/2 на шестиугольной решетке была решена Измаиляном и Ананикьяном [7]. Эта модель описывается гамильтонианом

$$-\beta H = \sum_{\langle ij \rangle} [JS_i S_j + KS_i^2 S_j^2 + LS_i^3 S_j^3 + \frac{M}{2} (S_i S_j^3 + S_j S_i^3)] - \Delta \sum_i S_i^2, \quad (6)$$

где $\beta = 1/k_b T$, $S_i = \pm 1/2, \pm 3/2$, а $\langle ij \rangle$ обозначает суммирование по всем ближайшим соседним узлам решетки. При некоторых условиях, налагаемых на параметры гамильтониана (6), модель Изинга со спином 3/2 на шестиугольной решетке отображается на модель Изинга со спином 1/2 на той же решетке, точное решение которой известно [8]. Эти условия в терминах $Z(4)$ калибровочной модели принимают вид

$$\exp(\beta_{12}) + \exp(\beta_{11} - \beta_{13}) = 2, \\ \cosh \frac{1}{2}(\beta_{11} - \beta_{22}) \cosh \frac{1}{2}(\beta_{11} - \beta_{13} - \beta_{12}) = \cosh \frac{1}{2}(\beta_{22} + \beta_{13} - \beta_{12}). \quad (7)$$

Далее, используя точное решение [7], найдем λ -поверхности, соответствующие логарифмической расходимости теплоемкости для нашей $Z(4)$ модели:

$$\frac{\tanh \frac{1}{4}(\beta_{22} - 2\beta_{12} + \beta_{11}) + \tanh \frac{1}{4}(\beta_{22} + 2\beta_{13} - \beta_{11}) \exp(-2\Delta_0)}{1 + \exp(-2\Delta_0)} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad (8)$$

$$\Delta_0 = \frac{3}{32}(9\beta_{11} + 9\beta_{12} - \beta_{13}) + \frac{1}{2}\beta_1 - 3R,$$

$$\exp(-4R) = \frac{\cosh \frac{1}{4}(\beta_{22} - 2\beta_{12} + \beta_{11})}{\cosh \frac{1}{4}(\beta_{22} + 2\beta_{13} - \beta_{11})} \cosh^{\frac{3}{2}} \frac{1}{2}(\beta_{12} + \beta_{13} - \beta_{11})$$

в пространстве независимых параметров β_2, β_3 и β_1 . Можно заметить, что λ -поверхность критических точек (8) определена только в двух областях на плоскости (β_2, β_3) :

$$(i) \quad 0 \leq \tanh \frac{1}{4}(\beta_{22} - 2\beta_{12} + \beta_{11}) \leq 1/\sqrt{3}, \quad 1/\sqrt{3} \leq \tanh \frac{1}{4}(\beta_{22} + 2\beta_{13} - \beta_{11}) \leq 1,$$

$$(ii) \quad 0 \leq \tanh \frac{1}{4}(\beta_{22} + 2\beta_{13} - \beta_{11}) \leq 1/\sqrt{3}, \quad 1/\sqrt{3} \leq \tanh \frac{1}{4}(\beta_{22} - 2\beta_{12} + \beta_{11}) \leq 1.$$

Для каждой пары (β_2, β_3) уравнение (8) определяет единственное значение Δ , кроме множества точек пересечения областей (i) и (ii), для которых параметр β_1 произволен. Таким образом, λ -поверхность (8) содержит две нетривиальные λ -линии критических точек:

$$(a) \quad \beta_{11} = \beta_{13} = 2\ln(2 + \sqrt{3}), \quad \beta_{12} = \beta_{22} = 0 \text{ и } \beta_1 \text{ произвольно,}$$

$$(б) \quad \beta_{11} = \beta_{12} = \beta_{13} = 0, \quad \beta_{22} = 2\ln(2 + \sqrt{3}) \text{ и } \beta_1 \text{ произвольно.}$$

Как показано в работе [7], на λ -линиях критическое поведение модели отлично от критического поведения на λ -поверхностях. Фазовый переход на λ -линиях не характеризуется уже логарифмической расходимостью параметра порядка P , где $P = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \langle S_i^2 \rangle = Z^{-1} \sum_{[S]} S^2 \exp[-\beta H]$ — квадрупольный момент. Здесь фазовый переход обус-

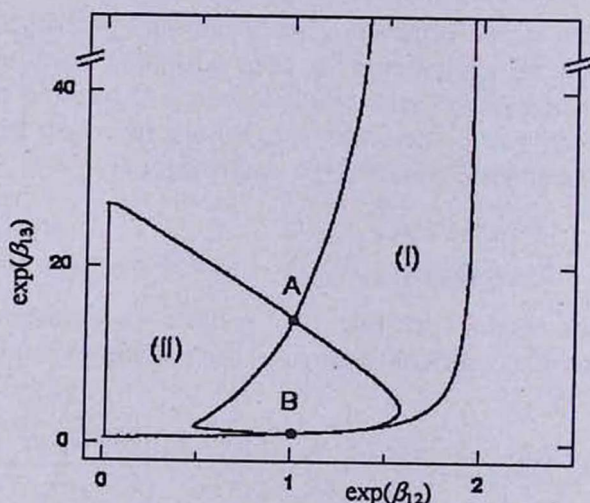


Рис.1. Область существования λ -поверхностей и λ -линий. Точкам А и В соответствуют проекции λ -линий на плоскость параметров $\exp(\beta_{12}), \exp(\beta_{13})$.

лавливается логарифмической расходимостью теплоемкости. Область существования λ -поверхностей и λ -линий показана на рис.1. После несложных вычислений можно показать, что эта область связная и что не существует фазового перехода при $T \rightarrow 0$ и $T \rightarrow \infty$. Следовательно, для всех допустимых значений параметров взаимодействия β_{ij} существует единственное конечное значение для внешнего поля, при котором наблюдается фазовый переход второго рода, кроме множества точек (а) и (б), где критическое поле может быть произвольным.

Таким образом, согласно гипотезе универсальности (критические индексы не зависят от деталей гамильтониана, а только от его симметрии и размерности), двумерные $Z(4)$ калибровочная модель и соответствующая ей модель Изинга со спином $3/2$ принадлежат одному и тому же классу универсальности.

Автор выражает благодарность Н.С.Ананикяну за ценные советы и полезные обсуждения в процессе подготовки статьи.

Работа выполнена при частичном финансировании из грантов INTAS-96-690, INTAS-97-347 и ISTC-A-102.

ЛИТЕРАТУРА

1. K.Wilson. Phys. Rev. D, 10, 2445 (1974).
2. G.Bhanot, M.Creutz. Phys. Rev. D, 24, 3212 (1981); G.Bhanot *et al.* Phys. Lett. B, 125, 67 (1983).
3. R.G.Edgar. Nucl. Phys. B, 200, 345 (1982).
4. L.Turban. J. Phys. A, 17, 419 (1984).
5. N.Ananikian, R.Shcherbakov. Phys. Lett., A 200, 27 (1995), J. Phys., A27, L887 (1994).
6. Y.Iwasaki *et al.* Phys. Rev. Lett., 78, 179 (1997), M. Okawa. Phys. Rev. Lett., 60, 1805 (1988).
7. N.Izmailian, N.Ananikian. Phys. Rev. B, 50, 6829 (1994).
8. I.Syozl, in: Phase Transitions and Critical Phenomena, edited by C.Domb and M.S.Green, Academic Press, London, 1972, vol.1, p.1.

CRITICAL SURFACES AND CRITICAL LINES OF THE $Z(4)$ GAUGE POTTS MODEL ON A TRIANGULAR LATTICE

R. G. GHULGHAZARYAN

The $Z(4)$ gauge Potts model with single and double plaquette representation of the action on a triangular lattice is considered. A subspace of coupling parameters at which the model may be solved exactly is found. The behavior of the model near the critical surfaces and critical lines is investigated. It is shown that this model and spin $3/2$ Ising model on a honeycomb lattice belong to the same universality class.

