Известия НАН Армении, Физика, т.35, №5, с.227-231 (2000)

УДК 539.143

О ВЫЧИСЛЕНИИ ФОРМФАКТОРОВ ОДНОМЕРНОГО ИЗОТРОПНОГО ФЕРРОМАГНЕТИКА ГЕЙЗЕНБЕРГА

В.В. МХИТАРЯН

Ереванский физический институт

(Поступила в редакцию 11 ноября 1999 г.)

Рассмотрена одномерная изотропная модель Гейзенберга со спином 1/2. С помощью алгебраического анзаца Бете вычислен формфактор спинового взаимодействия между ближайшими соседями в пределе бесконечного объема.

Как известно, ряд (1+1)-мерных моделей теории поля и статистической физики точно интегрируемы [1]. Несмотря на это, вопрос о вычислении точных корреляционных функций и формфакторов в этих моделях остается открытым.

В настоящей работе с помощью алгебраического анзаца Бете мы рассмотрим эту проблему на примере формфактора оператора взаимодействия ближайших спинов *XXX*-ферромагнетика Гейзенберга со спином 1/2, которое задается гамильтонианом

$$H=-\sum_{n=-N}^{N}[\sigma_n\sigma_{\nu+1}-1], \qquad \sigma\sigma=\sum_{n=-1}^{3}\sigma^a\sigma^a, \tag{1}$$

где σ_i – матрицы Паули, действующие в квантовых пространствах V_i; индекс $i=-N,..,0,..,N$ нумерует узлы решетки, к которым прикреплены V_i. Наложены также условия периодичности $V_{N+1}=V_{-N}$

1. Напомним основные элементы алгебраического Бете анзаца (АБА). Центральным объектом АБА является R-матрица [2]

$$R(\lambda-\mu)=\frac{1}{\lambda-\mu+i}\left(\left(\frac{\lambda-\mu}{2}+i\right)I\otimes I+\frac{\lambda-\mu}{2}\sigma\sigma\right).$$

Матрица монодромии определяется соотношением

$$T(\lambda)=\begin{pmatrix}A(\lambda) & B(\lambda)\\ C(\lambda) & D(\lambda)\end{pmatrix}=L_n(\lambda)...L_{-N}(\lambda),$$

где L_n – локальные матрицы монодромии [2]. Трансфер-матрица является следом матрицы монодромии, $\tau(\lambda)=\operatorname{tr}T(\lambda)=A(\lambda)+D(\lambda)$, а гамильтониан (1) определяется логарифмической производной от трансфер-матрицы [2]. R-матрица удовлетворяет соотношению Янга-Бакстера, которое обеспечивает интегрируемость модели и дает все коммутационные соотношения операторов A,B,C,D. К примеру,

$$\begin{gathered}[C(\mu),B(\lambda)]=g(\mu,\lambda)(A(\lambda)D(\mu)-A(\mu)D(\lambda)),\\ A(\mu)B(\lambda)=f(\lambda,\mu)B(\lambda)A(\mu)+g(\mu,\lambda)B(\mu)A(\lambda).\end{gathered} \tag{2}$$

Здесь мы ввели обозначения $g(\mu,\lambda)=i/\mu-\lambda$ и $f(\mu,\lambda)=1+g(\mu,\lambda)$.

Существует также вакуумое состояние $|0\rangle$ (состояние со спинами, направленными строго вверх) со следующими свойствами:

$$A(\lambda)|0\rangle=a(\lambda)|0\rangle,\ D(\lambda)|0\rangle=d(\lambda)|0\rangle,\ C(\lambda)|0\rangle=0,$$

где $a(\lambda)=(\lambda+i/2)^{2N+1}$, $\quad d(\lambda)=(\lambda-i/2)^{2N-1}$.

Получаем представление конфигурационного пространства $\Xi=\Pi_{\otimes}V_i$, при котором $B(\lambda)$ является оператором рождения магнонов, а $C(\lambda)$ – дуальным оператором уничтожения.

Корректный термодинамический предел $N\to\infty$ с конечными нормами и конечными собственными значениями обеспечивается следующей перенормировкой операторов A,B,C,D [3]:

$$\widetilde{A}(\lambda)=a(\lambda)^{-1}A(\lambda),\ \widetilde{D}(\lambda)=d(\lambda)^{-1}D(\lambda),\ \widetilde{B}(\lambda)=a^{-1/2}d^{-1/2}B(\lambda),\ \widetilde{C}(\lambda)=a^{-1/2}d^{-1/2}C(\lambda).$$

Нашим главным объектом рассмотрения будет формфактор

$$\langle 0|\prod_{j=1}^{l}\widetilde{C}(\lambda_j^C)[\sigma_n\sigma_{n+1}-I]\prod_{j=1}^{l}\widetilde{B}(\lambda_j^B)|0\rangle,$$

где $\{\lambda^C\}$ и $\{\lambda^B\}$ – произвольные множества реальнозначных параметров. Суть нашего подхода состоит в нахождении определенного соотношения для конечно-размерной цепочки и в дальнейшем анализе предела больших значений $N\to\infty$. При этом наш метод вычисления отличается от уже разработанных своей простотой и относительной ясностью.

2. Элементы матрицы монодромии $T(\lambda)$ в точке $\lambda=i/2$ являются операторами "квазитрансляций". Например, для $A(i/2)$ имеем

$$A(i/2)e_1\otimes\cdots\otimes e_{2N}\otimes|\uparrow\rangle=i(-1)^N|\uparrow\rangle\otimes e_1\otimes\cdots\otimes e_{2N},$$

где e – произвольный вектор из V, а $|\uparrow\rangle$ – вектор с проекцией спина $s_z=1/2$. Для $n\neq\pm N$ это дает $A(i/2)[\sigma_{n-1}\sigma_n-I]=[\sigma_n\sigma_{n+1}-I]A(i/2)$. Рассмотрим матричный элемент этого соотношения между состояниями $\prod_{j=1}^{l}B(\lambda_j^B)|0\rangle$ и $|0\rangle\prod_{j=1}^{l}B(\lambda_j^B)$. С помощью соотношений (2) можно получить формулу, после многократного применения которой находим:

$$\langle 0|\prod_{j=1}^{l} C(\lambda_j^C) O_{n+p} \prod_{j=1}^{l} B(\lambda_j^B)|0\rangle = \left[\frac{\Lambda(\lambda^C)}{\Lambda(\lambda^B)}\right]^p \langle 0|\prod_{j=1}^{l} C(\lambda_j^C) O_n \prod_{j=1}^{l} B(\lambda_j^B)|0\rangle - \tag{3}$$

$$- \sum_{m=n+1}^{n+p} \frac{\Theta_m(\lambda^C, \lambda^B)}{\Lambda(\lambda^B)} \left[\frac{\Lambda(\lambda^C)}{\Lambda(\lambda^B)}\right]^{p+n-m}$$

где

$$\Theta_n(\lambda^C, \lambda^B) = \sum_{m=1}^{l} \left\{ \Lambda_m^B \langle 0|\prod_{j=1}^{l} C(\lambda_j^C) O_n B(i/2) \prod_{j\neq m} B(\lambda_j^B)|0\rangle - \Lambda_m^C \langle 0|\prod_{j\neq m}^{l} C(\lambda_j^C) \cdot C(i/2) O_n \prod_{j=1}^{l} B(\lambda_j^B)|0\rangle \right\}.$$

Здесь для краткости записи мы ввели следующие обозначения:

$$\Lambda(\lambda^*) = a(i/2) \prod_{j=1}^{l} f(\lambda_j^*, i/2),$$

$$\Lambda_k^* = a(\lambda_k^*) g(i/2, \lambda_k^*) \prod_{j\neq k} f(\lambda_j^*, \lambda_k^*), \quad [\sigma_n \sigma_{n+1} - I] = O_n, \qquad * \equiv B, C$$

Идея состоит в суммировании (3) по p, которое в левой части дает гамильтониан (1), а первый член правой части можно просуммировать как геометрическую прогрессию. Более сложной оказывается сумма в последнем члене, которую мы символически обозначим через $\Re_n$ (из-за громоздкости записи $\Re_n$ мы ее здесь не приводим):

$$\langle 0|\prod_{j=1}^{l} C(\lambda_j^C) O_n \prod_{j=1}^{l} B(\lambda_j^B)|0\rangle \sum_{k=-N}^{N-1} \left[\frac{\Lambda(\lambda^C)}{\Lambda(\lambda^B)}\right]^{k-n} = -\langle 0|\prod_{j=1}^{l} C(\lambda_j^C) \tilde{H} \prod_{j=1}^{l} B(\lambda_j^B)|0\rangle - \Re_n(\lambda^C, \lambda^B), \tag{4}$$

где $\tilde{H}$ отличается от H тем, что никаких условий периодичности $V_{N=1} \equiv V_{-N}$ более не подразумевается, и верхний предел суммы в (1) равняется $N-1$.

Теперь рассмотрим термодинамический предел $N \to \infty$. Умножим обе части (4) на $\left[\Lambda(\lambda^B)/\Lambda(\lambda^C)\right]^{N+1/2}$ и устремим $N \to \infty$. Пределы такого рода вычисляются по правилам теории обобщенных функций [4]. Кроме прочих членов, у нас в пределе возникнут δ-функции от разностей $\lambda_i - \lambda_j$. Такие члены не дают вклада в неприводимые части формфактора, поскольку они означают, что некоторые из магнонов переходят из начального *in* состояния в конечное состояние *out*, не претерпевая рассеяния.

Отбрасывая δ-функции, приходим к соотношению

$$\left[\frac{\Lambda(\lambda^B)}{\Lambda(\lambda^C)}\right]^{n+1/2} \langle 0|\prod_{j=1}^{l} \tilde{C}(\lambda_j^C) O_n \prod_{j=1}^{l} \tilde{B}(\lambda_j^B)|0\rangle_{irr} =$$

$$= \left(1 - \frac{\Lambda(\lambda^C)}{\Lambda(\lambda^B)}\right) \Omega(\lambda^C, \lambda^B) - \sum_{m,n=1}^{l} M_{n,m}^{B,C} \left[\Omega(\{\lambda^C\}^{,m}, \{\lambda^B\}^{,n}) + \Phi(\lambda_m^C, \lambda_n^B)\right],$$

где

$$\Omega\left(\lambda^B,\lambda^C\right)=\lim_{N\to\infty}\left[\frac{\Lambda\left(\lambda^C\right)}{\Lambda\left(\lambda^B\right)}\right]^{N+1/2}\left\langle 0\right|\prod_{j=1}^{l}\widetilde{C}\left(\lambda_j^C\right)\widetilde{H}\prod_{j=1}^{l}\widetilde{B}\left(\lambda_j^B\right)\left|0\right\rangle\Bigg|_{irr},$$

$$\Phi\left(\lambda_m^C,\lambda_n^B\right)=\lim_{N\to\infty}\left[\frac{r\left(\lambda_m^C\right)}{r\left(\lambda_n^B\right)}\right]^{N+1/2}\sum_{k=1}^{N-1}\left\langle 0\right|\prod_{j\neq m}^{l}\widetilde{C}\left(\lambda_j^C\right)\mathrm{O}_k\prod_{j\neq n}^{l}\widetilde{B}\left(\lambda_j^B\right)\left|0\right\rangle\left[\frac{\Lambda\left(\lambda^B\right)}{\Lambda\left(\lambda^C\right)}\right]^{k+1/2}\Bigg|_{irr}, \quad (5)$$

$$M_{n,m}^{B,C}=\frac{\prod\limits_{k\neq n}^{l}f\left(\lambda_n^B,\lambda_k^B\right)\prod\limits_{j\neq m}^{l}f\left(\lambda_j^C,\lambda_m^C\right)}{\left(\lambda_n^B+i/2\right)\left(\lambda_m^C-i/2\right)}.$$

Здесь irr обозначает неприводимую часть, символ $\{*\}^k$ означает, что мы отбрасываем член с индексом k, а $r(\lambda)=(\lambda+i/2)/(\lambda-i/2)$.

Вычисление функций Ω и Φ выполняется с помощью теории скалярных произведений [1], при этом Φ получается из некоторой рекуррентной формулы. Для Ω же получаем соотношение

$$\Omega\left(\lambda^C,\lambda^B\right)=K\left(\lambda^C,\lambda^B\right)\sum_{\{\lambda^C\}}\frac{2}{(\lambda^C)^2+1/4}-2i\frac{\Lambda\left(\lambda^B\right)}{\Lambda\left(\lambda^C\right)}\sum_{n,m}\frac{M_{n,m}^{B,C}}{\lambda_m^C-i/2}K\left(\{\lambda^C\}^{\cdot m},\{\lambda^B\}^{\cdot n}\right),$$

где

$$K\left(\lambda^C,\lambda^B\right)=\left\{\prod_{i>j}g\left(\lambda_j^B,\lambda_i^B\right)g\left(\lambda_i^C,\lambda_j^C\right)\prod_{i,j}\frac{f\left(\lambda_j^B,\lambda_i^{CB}\right)}{g\left(\lambda_j^B,\lambda_i^C\right)}\right\}\det\left[\frac{g^2\left(\lambda_j^B,\lambda_i^C\right)}{f\left(\lambda_j^B,\lambda_i^C\right)}\right].$$

В конечном счете мы приходим к формуле

$$\left\langle 0\right|\prod_{j=1}^{l}\widetilde{C}\left(\lambda_j^C\right)\mathrm{O}_n\prod_{j=1}^{l}\widetilde{B}\left(\lambda_j^B\right)\left|0\right\rangle_{irr}=\left[\frac{\Lambda\left(\lambda^C\right)}{\Lambda\left(\lambda^B\right)}\right]^{n+1/2}\left(1-\frac{\Lambda\left(\lambda^C\right)}{\Lambda\left(\lambda^B\right)}\right)\times$$
$$\times\sum_{\substack{\{\lambda_I^C\}\{\lambda_{II}^C\}\\ \{\lambda_I^B\}\{\lambda_{II}^B\}}}\left\{\prod f\left(\lambda_{II}^C,\lambda_I^C\right)f\left(\lambda_I^B,\lambda_{II}^B\right)\right\}K\left(\left\{\lambda_I^B\right\}\left\{\lambda_I^C\right\}\right)\Omega\left(\left\{\lambda_{II}^C\right\}\left\{\lambda_{II}^B\right\}\right).$$

Эта довольно сложная сумма существенно упрощается в предельном случае малых спектральных параметров и импульсов ($\lambda_i\approx p_i$ при малых импульсах). Особенно простым является случай $l=1$, когда в (4) величина $\Re$ зануляется, а для формфактора получаем

$$\left\langle 0\right|\widetilde{C}\left(\lambda^C\right)\left[\sigma_n\sigma_{n+1}-I\right]\widetilde{B}\left(\lambda^B\right)\left|0\right\rangle_{irr}=\left[\frac{r\left(\lambda^C\right)}{r\left(\lambda^B\right)}\right]^{n+1/2}\cdot\frac{1}{\left(\lambda^C\right)^2+\frac{1}{4}}\cdot\frac{1}{\left(\lambda^B\right)^2+\frac{1}{4}}.$$

Случай $l=2$ тоже относительно легко поддается анализу. После некоторых сокращений получаем

$$\langle 0|\prod_{j=1}^{2}\widetilde{C}\left(\lambda_j^C\right)\left[\sigma_n\sigma_{n+1}-I\right]\prod_{j=1}^{2}\widetilde{B}\left(\lambda_j^B\right)|0\rangle_{irr} =$$

$$= 64\left[\frac{\Lambda\left(\lambda^C\right)}{\Lambda\left(\lambda^B\right)}\right]^{n+1/2}\left(\sum\lambda^B-\sum\lambda^C\right)^2 \det{}_2\left(\frac{1}{\lambda_i^B-\lambda_j^C}\right).$$

В заключение отметим, что данные вычисления непосредственно обобщаются для *XXZ*-ферромагнетика Гейзенберга. Представляется также интересным дальнейшее развитие данного подхода для вычисления формфакторов в других моделях, допускающих описание в терминах АБА.

ЛИТЕРАТУРА — Библиогр. указ.

1. **Н.М.Боголюбов, А.Г.Изергин, В.Е.Корепин.** Корреляционные функции интегрируемых систем и квантовый метод обратной задачи. М., Наука, 1992.
2. **Л.А.Тахтаджян, Л.Д.Фаддеев.** Спектр и рассеяние возбуждений в одномерном изотропном магнетике Гейзенберга. Зап. науч. сем. ЛОМИ, **109**, 131-184 (1981).
3. **D.Babbitt and L.Thomas.** J. Math. Anal. and Appl., **59**, 392 (1977).
4. **I.M.Gel'fand and G.E.Shilov.** Generalized Functions, vol.1. Academic Press, 1968.

ON THE CALCULATION OF FORM-FACTORS IN ONE-DIMENSIONAL ISOTROPIC HEISENBERG FERROMAGNET С. — Рез.

V.V. MKHITARYAN

The one-dimensional spin-1/2 isotropic Heisenberg model is considered. The form-factor of the nearest neighbor spin interaction is calculated, using the algebraic Bethe ansatz in the limit of infinite volume.

ՀԱՅԶԵՆԲԵՐԳԻ ՄԻԱՉԱՓ ՀԱՄԱՍԵՌ ՖԵՌՈՄԱԳՆԻՍԻ ՖՈՐՄՖԱԿՏՈՐՆԵՐԻ ՀԱՇՎԵԼՈՒ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Վ.Վ. ՄԽԻԹԱՐՅԱՆ

Քննարկված է միաչափ սպին-1/2 Հայզենբերգի համասեռ մոդելը: Հանրահաշվական Բեթե անզացի օգնությամբ հաշվվաց է մոտակա սպինների փոխազդեցության օպերատորի ֆորմֆակտորը անվերջ ծավալի սահմանում: