Известия НАН Армении, Физика, т.35, №4, с.171-178 (2000)

УДК 537.87

ОБ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЧАСТИЦ В СГУСТКЕ ПО ЗАДАННОМУ СПЕКТРАЛЬНОМУ РАСПРЕДЕЛЕНИЮ ИНТЕНСИВНОСТИ ИЗЛУЧЕНИЯ

Х.В. КОТАНДЖЯН, Н.Б. ЕНГИБАРЯН,
А.В. ПЕТРОСЯН, М.Ю. КОНДРАТЕНКОВ*

Институт прикладных проблем физики НАН Армении

*Московский инженерно-физический институт

(Поступила в редакцию 17 мая 2000 г.)

В работе предложен алгоритм решения обратной задачи по определению функции распределения частиц в сгустке по заданному спектральному распределению интенсивности излучения. Приведены результаты соответствующих численных расчетов для заданого модельного распределения частиц в сгустке.

1. Введение

Вопрос об излучении электронных сгустков исследовался многими авторами. Были рассмотрены различные типы излучений (черенковское [1-4], переходное [5-10], ондуляторное [11], тормозное [12], излучение Смита-Парселла [13]) и различные функции распределения (гауссовское, параболическое, гаусс-параболическое и т.д.) электронов в сгустке. Вопросу об излучении электронных сгустков произвольной структуры в однородных средах посвящена работа [14]. В ней найдена общая формула для частотно-углового распределения интенсивности излучения, усредненная по произвольной статистической функции распределения электронов в сгустке. Полученное выражение для средней интенсивности содержит форм-фактор, представляющий собой произведение двух функций, одна из которых не зависит от типа излучения и определяется лишь распределением плотности электронов вдоль направления их движения (т.н. продольный форм-фактор). Аналогичная задача об излучении электронного сгустка при пролете над дифракционной решеткой произвольного профиля (излучение Смита-Парселла) и над релеевской акустической волной, возбужденной на плоской границе раздела двух однородных сред, рассматривалась в [15].

Целью данной работы является определение так называемой продольной функции распределения частиц в сгустке по известному спектральному распределению интенсивности излучения, испущенного в процессе взаимодействия сгустка с твердым телом в поле внешних воздействий.

2. Постановка задачи

Как известно, интенсивность излучения холодного сгустка заряженных частиц определяется следующим выражением:

$$\frac{dI_N}{d\omega d\Omega} = [N + N(N-1)F(\omega)]\frac{dI_1}{d\omega d\Omega}, \qquad (1)$$

где N – число частиц в сгустке, $d\Omega$ – элемент телесного угла, ω – частота, $dI_1/d\omega d\Omega$ – спектрально-угловое распределение интенсивности излучения одной частицы, а

$$F(\omega) = \left| \int dz p(z) e^{i\frac{\omega}{v}z} \right|^2 \qquad (2)$$

– так называемый продольный форм-фактор сгустка, определяющий вклад когерентных эффектов. В (2) z – координата вдоль направления движения сгустка, v – скорость частиц в сгустке, $\rho(z)$ – функция пространственного распределения частиц вдоль направления движения ("продольная функция распределения"). Для процессов излучения с периодическим движением сгустка аналогичное (1) соотношение имеет место для интенсивности излучения на заданной гармонике с частотой $\omega_n = 2\pi n/T$, где T – период движения. При этом в (1) следует произвести замены

$$\frac{dI_N}{d\omega d\Omega} \to \frac{dI_{nN}}{d\Omega}, \qquad \frac{dI_1}{d\omega d\Omega} \to \frac{dI_{n1}}{d\Omega}.$$

В (1) член, пропорциональный N^2, обусловлен когерентными эффектами, а продольный форм-фактор $F(\omega)$ определяет вклад этих эффектов в интенсивность излучения. Полагая, что в сгустке число частиц N>>1, для когерентной части интенсивности излучения имеем

$$\left(\frac{dI_N}{d\omega d\Omega}\right)_{coh} = N^2 F(\omega)\frac{dI_1}{d\omega d\Omega}. \qquad (3)$$

Формула (1) является достаточно универсальной и применима для различных процессов излучения.

Формулы, полученные в [1-13], определяют распределение интенсивности излучения одной частицы $dI_1/d\omega$ в случае различных механизмов излучения. С их помощью по формуле (3) можно определить спектральное распределение интенсивности когерентного излучения $(dI_N/d\omega)_{coh}$ сгустка частиц, если известно пространственное распределение $\rho(z)$ частиц сгустка вдоль направления движения z. Можно обратить эту задачу и попытаться восстановить функцию пространственного распределения $\rho(z)$ частиц по заданной интенсивности излучения сгустка частиц $dI_N/d\omega$. При этом проблема сводится к решению нелинейного интегрального уравнения

$$|\Phi(\omega)|^2 = \varphi(\omega) \tag{4}$$

(см. (2), (3)), где

$$\Phi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(z) e^{i\omega z} dz, \tag{5}$$

а

$$\varphi(\omega) = \frac{dI_N / d\omega}{N^2 dI_1 / d\omega} \tag{6}$$

– известная величина, числитель которой определяется экспериментально, а знаменатель – теоретически (для упрощения записи здесь и далее отношение ω/v обозначается буквой ω).

Разумеется, без дополнительных ограничений на ρ задача не имеет однозначного решения. Легко проверить, что если $\rho(z)$ – некоторое решение уравнения (4), то функция $\rho_3(z) = \rho(\pm(z-a))$, где a – произвольная постоянная, также является решением этого уравнения. Таким образом, имеется произвол в выборе начала отсчета оси OZ и направления отсчета Z. Важными дополнительными свойствами ρ являются неотрицательность и финитность $\rho(z)$ (сгусток конечной длины). Обозначим через ℓ (неизвестную) длину сгустка вдоль оси OZ. В силу произвола в выборе начала отсчета будем считать, что точка $z=0$ является левой границей сгустка, а точка $z = \ell$ – ее правой границей. Отрезок $[0, \ell]$ является наименьшим отрезком, вне которого $\rho(z) = 0$, то есть

$$\rho(z)=0 \quad \text{при} \quad z \notin [0, \ell]. \tag{7}$$

Легко проверить, что функция φ, определяемая соотношением (4), является четной функцией на $(-\infty, \infty)$, и поэтому далее под φ будем понимать четное продолжение исходной функции (определяемой экспериментально).

Заметим, что если в (5) ω считать комплексным числом, то Φ окажется целой функцией комплексного переменного ω. В этом случае наша задача сводится к построению целой функции по известным значениям ее модуля на вещественной оси. Такая интерпретация может оказаться полезной при исследовании вопроса об однозначном определении $\rho(z)$. Ниже мы воспользуемся другим подходом к решению обратной задачи, который основан на применении функции Патерсона $P(z)$.

3. Алгоритм решения и результаты численных расчетов

Введем функцию $P(z)$, определяемую формулой

$$P(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(t)\rho(t-z)dt. \tag{8}$$

С учетом (7) получаем

$$P(z) = \int_{z}^{l} \rho(t)\rho(t-z)dt. \tag{9}$$

(Правая часть этих выражений является сверткой функций $\rho(z)$ и $\rho(t-z)$). Далее, используя известную формулу преобразования Фурье от свертка, получаем

$$\hat{P}(\omega) = \left|\Phi(\omega)\right|^2 = \varphi(\omega). \tag{10}$$

Поэтому, с учетом четности и вещественности φ получаем выражение $P(z)$ через косинус-преобразование Фурье от φ:

$$P(z) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \varphi(\omega)\cos\omega z d\omega. \tag{11}$$

Из (10) и (11) ясно, что первым шагом решения обратной задачи должно являться построение функции Патерсона $P(z)$ по формуле (11). При этом должны быть использованы экспериментальные данные о функции φ на некотором конечном множестве Ω. Интеграл (11) должен быть вычислен на достаточно густой равномерной сетке значений z. При этом могут быть применены некоторые модификации известного метода Филона [16]. Из (9) следует, что

$$P(z)=0 \quad \text{при} \quad z \geq \ell. \tag{12}$$

Так как ℓ – длина сгустка с концами $z = 0$ и $z = \ell$, то функция $\rho(z)$ отлична от нуля и положительна в некоторых окрестностях $(0, \delta_1)$ и (δ_2, ℓ) точек 0 и ℓ. Отсюда следует, что функция $P(z)$ также отлична от нуля в окрестности точки ℓ. Мы приходим к следующему заключению: число ℓ является наименьшим значением чисел L, удовлетворяющих условию $P(z) = 0$ при $z \geq L$:

$$\ell = \min_{L}\{P(z) = 0 \quad \text{при} \quad z > L\}. \tag{13}$$

Это важное свойство функции Патерсона $P(z)$ дает прямой способ определения длины сгустка ℓ. Для этого нам нужно найти тот наименьший интервал $[0, \ell]$, справа от которого определенная из (11) функция $P(z)$ обращается в нуль. Ясно, что здесь речь идет о приближенном выполнении равенства $P(z)=0$ с точностью до экспериментальных ошибок.

После определения ℓ задача сводится к решению нелинейного интегрального уравнения свертки (9) на промежутке $[0,\ell]$. С целью приближенного численного решения этого уравнения заменим входящий в это выражение интеграл конечной суммой. Простейший способ дискретизации интеграла сводится к замене

$$\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t)dt \approx (\beta-\alpha)\varphi\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \tag{14}$$

на малом интервале $[\alpha, \beta]$.

С этой целью разобьем отрезок $[0,\ell]$ на $2n$ равных частей и введем обозначения $h=l/2n$, $z_k=(k-1)h$, $k=1,\ldots,2n$.

$$P_k = \frac{1}{h}P[(k-1)h], \quad \rho_k = \rho[(k-\frac{1}{2})h]. \tag{15}$$

Из (9) имеем

$$P_k = \frac{1}{h}\int_{(k-1)h}^{2nh} \rho(t)\rho[t-(k-1)h]dt = \frac{1}{h}\sum_{m=k}^{2n}\int_{(m-1)h}^{mh} \rho(t)\rho[t-(k-1)h]dt. \tag{16}$$

Применяя к каждому интегралу под знаком суммы квадратурную формулу (14), получаем

$$P_k \approx \sum_{m=k}^{2n} \rho_m \rho_{m-k+1}, \qquad k=1,\ldots,2n. \tag{17}$$

Предположим, что число n выбрано и все числа P_k вычислены с помощью (11) и (15), причем $P_{2n}>0$. Тогда задача сводится к решению нелинейной алгебраической системы уравнений (17), содержащей $2n$ неизвестных $\rho_1,\ldots,\rho_{2n}$.

Сначала построим так называемое "симметричное приближение" к решению системы уравнений (17). В этом приближении предполагается, что

$$\rho_k = \rho_{2k+1-k}, \qquad k=1,..,n \tag{18}$$

При $k=2n$ из (17) имеем

$$\rho_1\rho_{2n} = P_{2n}$$

или с учетом (18) получаем

$$\rho_1 = \rho_{2n} = \sqrt{P_{2n}} \equiv a. \tag{19}$$

В свою очередь при $k = 2n-1$ (17) сводится к

$$\rho_1\rho_{2n-1} + \rho_1\rho_{2n} = P_{2n-1},$$

откуда находим ρ_2:

$$\rho_{2n-1} = \rho_2 = \frac{1}{2a}P_{2n-1}. \tag{20}$$

Продолжим этот процесс. Полагая, что в (17) $k = 2n-s+1$, получаем

$$\rho_1\rho_{2n-1+1} + \rho_2\rho_{2n-s+2} + ... + \rho_s\rho_{2n} = P_{2n-s+1},$$

откуда определяются числа ρ_s и ρ_{2n-s+1}:

$$\rho_s = \rho_{2n-s+1} = \frac{1}{2a}[P_{2n-s+1} - \sum_{m=2}^{s-1}\rho_m\rho_{s-m+1}], \qquad s = 3,...,n. \tag{21}$$

Таким образом, используя уравнение (17) при $k = n+1,\ldots,2n$ и условия (18), можно по рекуррентным формулам определить числа $\{\rho_k\}_{k=1}^{2n}$ в симметрическом приближении. Этим завершается первый этап решения системы уравнений (17).

На втором этапе числам $\rho_1^0,...,\rho_n^0$ приписываются уже найденные приближенные значения, а числа $\rho_{2n},...,\rho_1$ рекуррентным образом определяются из уравнения (17) при $k = 2n$, $2n-1,\ldots,1$. Тем самым в первом приближении учитывается возможность асимметрии чисел $\rho_1,...,\rho_{2n}$. Уточнение найденных приближенных значений $\rho_1,...,\rho_{2n}$ может быть произведено несколькими методами. Одним из них является следующий. Представим искомые числа $\rho_1,...,\rho_{2n}$ в виде

$$\rho_k = \rho_k^0 + \delta_k, \tag{22}$$

где ρ_k^0 – уже найденные приближенные значения чисел $\rho_1,...,\rho_{2n}$, а δ_k – неизвестные поправки. Подставляя (22) в (17) и игнорируя произведения типа $\delta_k\delta_m$, приходим к линейной алгебраической системе уравнений относительно $\delta_1,...,\delta_{2n}$:

$$\sum_{m=1}^{2n-k+1}\rho_{m-k+1}^0\delta_m + \sum_{m=k}^{2n}\rho_{m-k+1}^0\delta_m = \widetilde{P}_k, \tag{23}$$

где $\widetilde{P}_k = P_k - \sum_{m=k}^{2n}\rho_m^0\rho_{m-k+1}^0$. Решая эту систему уравнений, можно определить более точные значения ρ_k. Повторяя подобную процедуру, можно повысить точность найденных решений.

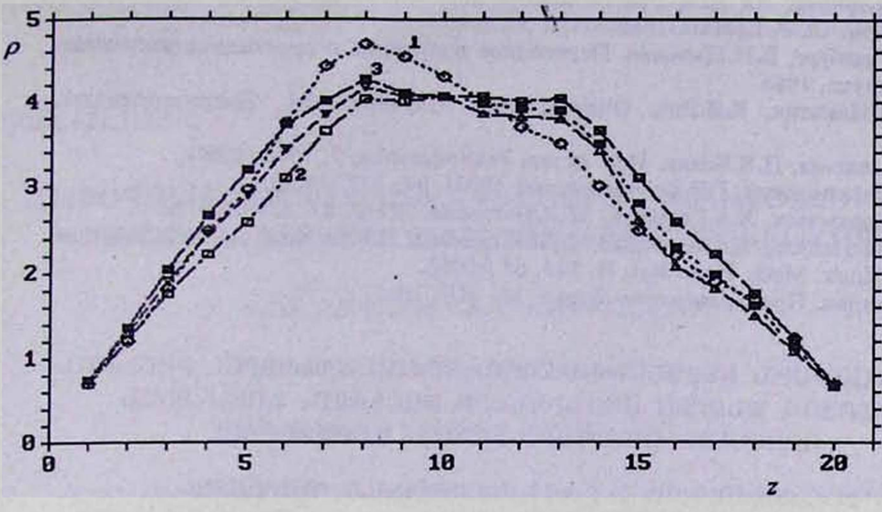

Рис.1.

Нами были проведены численные расчеты для ряда модельных распределений частиц в сгустке. Для иллюстрации на рис.1 приведены результаты численных расчетов по формулам (18)-(23). Для асимметричного модельного распределения $\rho(z)$ частиц в сгустке (светлые кружочки 1) функция Патерсона определялась по формуле (9). Найденные значения P_k подставлялись в (17) и с помощью (18)-(23) восстанавливалось исходное распределение $\rho(z)$. Квадратики 2 являются симметричными решениями ρ_k^0 первого этапа решения обратной задачи. Треугольники, соединенные пунктиром, – результаты расчетов второго этапа. И, наконец, темные квадратики 3 – результат повторного применения второго этапа.

Авторы признательны А.Р.Мкртчяну за постановку задачи, критические замечания и многочисленные ценные обсуждения, а также Л.Ш.Григоряну за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. H.Lashinsky. J. Appl. Phys., **27**, 631 (1951).
2. M.Danos. J. Appl. Phys., **26**, 2 (1955).
3. **В.П.Зрелов.** Излучение Вавилова-Черенкова и его применение в физике высоких энергий. М., Атомиздат, 1968.
4. **И.М.Франк.** Излучение Вавилова-Черенкова. Вопросы теории. М., Наука, 1988.
5. **В.Л.Цытович.** ЖЭТФ, **31**, 923 (1961).
6. **А.Ц.Аматуни.** Изв. АН Арм. ССР, физ.-мат. науки, **15**, 109 (1962).
7. **Б.В.Хачатрян.** ЖТФ, **34**, 637 (1964).
8. **М.Л.Тер-Микаелян.** Влияние среды на электромагнитные процессы при высоких энергиях. Ереван, изд. АН Арм. ССР, 1969.

9. Г.М.Гарибян, Ян Ши. Рентгеновское переходное излучение. Ереван, изд. АН Арм. ССР, Ереван, 1983.
10. В.Л.Гинзбург, В.Н.Цытович. Переходное излучение и переходное рассеяние. М., Наука, 1984.
11. М.М.Никитин, В.Я.Эпп. Ондуляторное излучение. М., Энергоатомиздат, 1988.
12. Г.А.Алексеев, П.В.Блиох. Изв. вузов, Радиофизика, 7, 1046 (1964).
13. Б.М.Болотовский, Г.В.Воскресенский. УФН, 94, 377 (1968).
14. Н.А.Корхмазян, Л.А.Геворгян, М.Л.Петросян. ЖТФ, 47, 1583 (1977).
15. A.R.Mkrtchyan, L.A.Gevorgian, L.Sh.Grigorian, B.V.Khachatrian, A.A.Saharian. Nucl. Instr. Meth. Phys. Res. B, 145, 67 (1998).
16. И.Снетдон. Преобразование Фурье. М., ИЛ, 1955.

ՃԱՌԱԳԱՅԹՄԱՆ ԻՆՏԵՆՍԻՎՈՒԹՅԱՆ ՏՐՎԱԾ ՍՊԵԿՏՐԱԼ ԲԱՇԽՄԱՆ ՄԻՋՈՑՈՎ ՓՆՋՈՒՄ ՄԱՍՆԻԿՆԵՐԻ ԲԱՇԽՄԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆ ՈՐՈՇԵԼՈՒ ՀԱԿԱԴԱՐՁ ԽՆԴՐԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Խ.Վ. ՔՈԹԱՆՋՅԱՆ, Ն.Բ. ԵՆԳԻԲԱՐՅԱՆ, Ա.Ո. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ,
Մ.Յու. ԿՈՆԴՐԱՏԵՆԿՈՎ

Աշխատանքում առաջադրված է ճառագայթման ինտենսիվության տրված սպեկտրալ բաշխման միջոցով փնջում մասնիկների բաշխման ֆունկցիան որոշելու հակադարձ խնդրի լուծման ալգորիթմ: Բերված են համապատասխան թվային հաշվարկների արդյունքները փնջում մասնիկների տրված փորձնական բաշխման համար:

INVERSE PROBLEM ON DETERMINATION OF PARTICLE DISTRIBUTION FUNCTION IN A BUNCH BASED ON THE GIVEN SPECTRAL DISTRIBUTION OF RADIATION INTENSITY

KH.V. KOTANJYAN, N.B. ENGIBARYAN, A.V. PETROSYAN,
M.YU. KONDRATENKOV

An algorithm is proposed for solution of an inverse problem on determination of particle distribution function in a bunch based on the given spectral distribution of the radiation intensity. Appropriate numerical calculations of the model distribution of particles in the bunch were made and the calculation results are given.