Известия НАН Армении, Физика, т.35, №3, с.115-123 (2000)

УДК 537.87

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ИЗЛУЧЕНИЯ ЗАРЯДА, ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ВОКРУГ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА

А.С. КОТАНДЖЯН, Г.Ф. ХАЧАТРЯН,
А.В. ПЕТРОСЯН, А.А. СААРЯН

Институт прикладных проблем физики НАН Армении

(Поступила в редакцию 11 ноября 1999 г.)

Исследована интенсивность излучения заряда, равномерно движущегося по окружности вокруг диэлектрического цилиндра, погруженного в однородную среду. Показано, что при выполнении условии Черенкова для вещества цилиндра и скорости заряда, появляются узкие пики в угловом распределении числа квантов, излученных во внешнее пространство. Для некоторых значений параметров задачи в этих пиках плотность числа квантов заданной гармоники превышает соответствующую величину для излучения в вакууме на 3-4 порядка. Рассмотрено также поле излучения внутри цилиндра.

1. Введение

Синхротронное излучение имеет важные приложения в различных областях физики и астрофизики. Оно детально исследовано как на классическом, так и на квантовом уровнях (см., например, [1] и приведенные там ссылки). Отдельный круг задач составляет исследование влияния среды на различные характеристики синхротронного излучения. Излучение заряда, равномерно движущегося по окружности в однородной диэлектрической среде, впервые рассматривалось Цытовичем [2], а затем и Китао [3] (см. также [4]). В работах [5-9] исследовано излучение при вращении заряда вокруг диэлектрического шара, окруженного однородной средой. В частности, в [7-9] показано, что наличие шара приводит к интересным эффектам: если для вещества шара и скорости частицы удовлетворяется условие Черенкова, то в спектре излучения появляются сильно выраженные пики, в которых интенсивность излучения во много раз превосходит соответствующую величину в случае однородной среды.

В данной статье на основе результатов работы [10] исследованы свойства излучения заряда, равномерно движущегося по окружности вокруг диэлектрического цилиндра, погруженного в однородную среду.

В работе [10] была развита рекуррентная схема построения функции Грина электромагнитного поля для среды, состоящей из произвольного числа соосных однородных цилиндрических слоев. В качестве приложения там же выведена формула для интенсивности излучения заряда, вращающегося вокруг диэлектрического цилиндра, окруженного однородной средой, причем рассматривалось излучение во внешнее по отношению к цилиндру пространство. В настоящей работе на основе полученной формулы подробно исследованы частотно-угловые характеристики излучения, а также рассмотрено излучение, распространяющееся внутри цилиндра.

2. Исследование интенсивности излучения вне цилиндра

Пусть заряд q равномерно вращается по окружности радиуса ρ_0 в плоскости $z=0$ вокруг цилиндра радиуса ρ_1 с осью z. Диэлектрическая проницаемость цилиндра равна ε_0 и система погружена в однородную среду с проницаемостью ε_1 (магнитную проницаемость для простоты полагаем равной единице). Усредненное по периоду движения угловое распределение интенсивности излучения на больших расстояниях от оси цилиндра и на частоте $m\omega_0 = mv/\rho_0$ (v – скорость частицы) определяется формулой [10]

$$\frac{dI_m}{d\Omega}=\frac{q^2m^2\omega_0^2\sqrt{\varepsilon_1}}{8\pi c}\beta^2[\left|B_m^{(+)}-B_m^{(-)}\right|^2+\left|B_m^{(+)}+B_m^{(-)}\right|^2\cos^2\vartheta], \qquad \beta=v/c \quad (1)$$

где m – положительное целое число, определяющее номер гармоники, ϑ – угол между направлением излучения и осью z, $d\Omega=2\pi\sin\vartheta d\vartheta d\varphi$,

$$B_m^{(\pm)}=J_{m\pm1}(\lambda_1\rho_0)-H_{m\pm1}(\lambda_1\rho_0)\frac{W(J_{m\pm1},J_{m\pm1})}{W(J_{m\pm1},H_{m\pm1})}\pm2\frac{i\delta_m\lambda_0}{\pi\rho_1}\frac{J_m(\lambda_0\rho_1)J_{m\pm1}(\lambda_0\rho_1)}{W(J_{m\pm1},H_{m\pm1})}, \quad (2)$$

$$\delta_m=[\frac{2\varepsilon_0}{\varepsilon_1-\varepsilon_0}-\lambda_0J_m(\lambda_0\rho_1)\sum_{l=-1,+1}\frac{lH_{m+l}(\lambda_1\rho_1)}{W(J_{m+l},H_{m+l})}]^{-1}\sum_{l=-1,+1}\frac{H_{m+l}(\lambda_1\rho_0)}{W(J_{m+l},H_{m+l})}. \quad (3)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\lambda_1=\frac{m\omega_0}{c}\sqrt{\varepsilon_1}\sin\vartheta, \qquad \lambda_0=\frac{m\omega_0}{c}\sqrt{\varepsilon_0-\varepsilon_1\cos^2\vartheta}, \quad (4)$$

$$W(a,b)=a(\lambda_0\rho_1)\frac{\partial b(\lambda_1\rho_1)}{\partial\rho_1}-b(\lambda_1\rho_1)\frac{\partial a(\lambda_0\rho_1)}{\partial\rho_1}, \quad (5)$$

$J_\nu(x)$ – функция Бесселя первого рода, $H_\nu(x)$ – функция Ханкеля (здесь и ниже для упрощения записи формул верхний индекс 1 у функции Ханкеля опущен). При $\varepsilon_0=\varepsilon_1$ в правых частях выражений (2) отличны от нуля только первые слагаемые и из (1) получаем формулу для синхротронного излучения в однородной среде, впервые выведенную Цытовичем [2]. Из (1) в пределе $\varepsilon_0 \to \infty$ можно получить также формулу для интенсивности излучения заряда, вращающегося вокруг идеально проводящего цилиндра. В этом случае соответствующие выражения для функций $B_m^{(\pm)}$ имеют следующий вид:

$$B_m^{(\pm)} = i[J_{m\pm1}(\lambda_1\rho_0)Y_{m\pm1}(\lambda_1\rho_1) - J_{m\pm1}(\lambda_1\rho_1)Y_{m\pm1}(\lambda_1\rho_0)]/H_{m\pm1}(\lambda_1\rho_1), \qquad (6)$$

где Y_m – функция Неймана. Отсюда следует, что в случае проводящего цилиндра интенсивность излучения стремится к нулю при $\rho_0 \to \rho_1$.

Соответствующую (1) формулу для числа квантов, излучаемых на гармонике m в телесном угле $d\Omega$ при одном обороте, можно представить в виде

$$\frac{dN_m}{d\Omega} = \frac{q^2 m \alpha^2}{4\hbar c\sqrt{\varepsilon_1}} F_m(\vartheta, \alpha, \varepsilon_0/\varepsilon_1, \rho_1/\rho_0), \qquad \alpha = \beta\sqrt{\varepsilon_1}, \qquad (7)$$

где функция F_m определяется выражением в квадратных скобках (1). На основе формулы (7) нами были проведены численные расчеты углового распределения числа излученных квантов для различных значений параметров задачи: энергии частицы, диэлектрических проницаемостей, радиуса орбиты и номера гармоники. Для сравнительного анализа эффектов, обусловленных наличием диэлектрического цилиндра, сначала было рассмотрено угловое распределение числа квантов в случае однородной среды (заметим, что в [2,3] исследовалась лишь проинтегрированная по углам интенсивность излучения). На рис.1 приведены результаты соответствующих расчетов для различных значений диэлектрической проницаемости среды $\varepsilon = 1, 3, 6, 8$. Энергия заряда E = 2 MeV, номер гармоники $m = 24$. При малых m угловое распределение более изотропно. При наличии среды полное излучение превосходит соответствующее излучение в вакууме и увеличивается с возрастанием ε (в предположении отсутствия затухания). Например, в среде с $\varepsilon = 3$ число излученных квантов более чем на порядок больше, чем излучение в вакууме. Кроме этого, при выполнении условия черенковского излучения, $\beta\sqrt{\varepsilon} > 1$, появляется осцилляционная картина зависимости числа квантов от угла ϑ. Осцилляционная часть расположена правее пика с максимальным числом квантов. При увеличении ε этот пик смещается в область малых углов, а соответствующая частота осцилляций возрастает. Очевидно, что появление пика в угловом распределении числа излученных квантов правого максимума обусловлено черенковским излучением, а осцилляции правее этого максимума связаны с наложением этого излучения с различных участков траектории заряда.

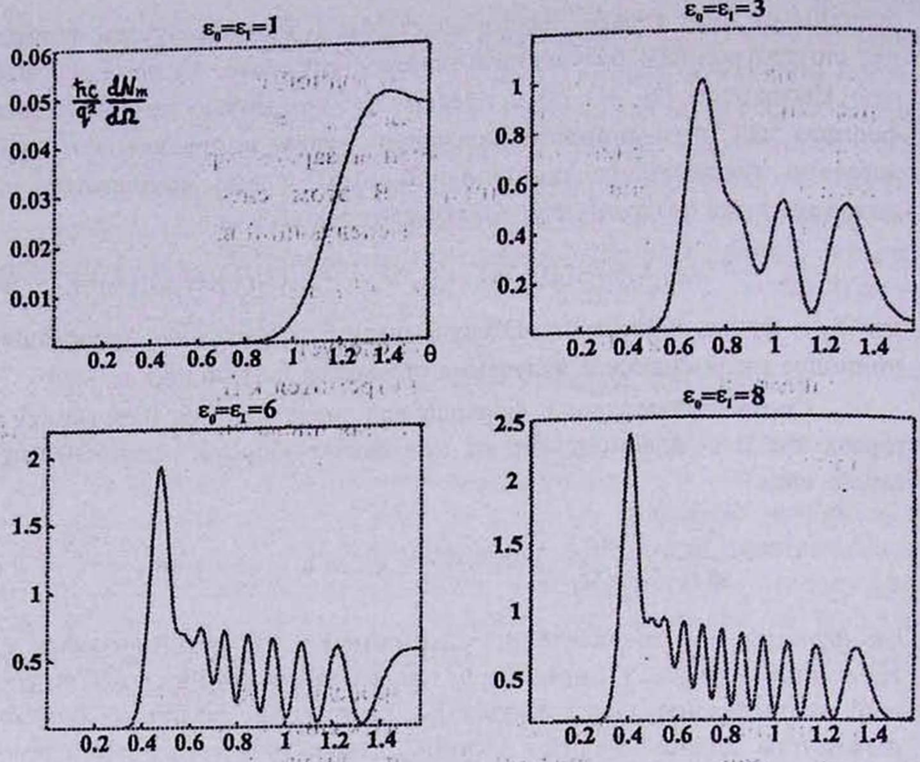

Рис.1. Зависимость числа квантов, излученных при одном обороте, от угла θ в однородных средах с различными диэлектрическими проницаемостями. Энергия электрона E=2 MeV, $\rho_1 / \rho_0 = 0.95$, $m = 24$.

Перейдем теперь к анализу эффектов, обусловленных наличием диэлектрического цилиндра. На рис.2 в логарифмическом масштабе приведена угловая зависимость числа излученных квантов в вакууме (пунктирная линия) и при наличии цилиндра с проницаемостью $\varepsilon_0 = 3$ ($\varepsilon_1 = 1$) для значений параметров E=2 MeV, $\rho_1 / \rho_0 = 0.95$, $m = 18$. Второму случаю соответствует кривая с сильно выраженными узкими пиками. Такие пики появляются всякий раз, когда для скорости частицы и диэлектрической проницаемости цилиндра удовлетворяется условие Черенкова и $\varepsilon_0 > \varepsilon_1$. Для некоторых рассмотренных нами случаев значение плотности числа квантов $dN_m / d\Omega$ в максимуме превосходит соответствующее вакуумное значение на 3-4 порядка. Эти пики чрезвычайно узкие: их ширина $\Delta\vartheta \sim 10^{-4} - 10^{-3}$. При увеличении отношения ρ_0 / ρ_1 пики уменьшаются и исчезают, а интенсивность излучения при наличии цилиндра быстро стремится к соответствующей вакуумной функции. На рис.3 приведены зависимости числа излученных квантов $\frac{\hbar c}{q^2}\frac{dN_m}{d\Omega}$ на гармонике m от угла θ при $\varepsilon_0 = 3$, $\varepsilon_1 = 6$ (пунктирная линия) и $\varepsilon_0 = 12$, $\varepsilon_1 = 6$ (сплошная линия). Энергия электрона E = 2 MeV, $\rho_1 / \rho_0 = 0.95$, $m = 24$. Как видим, при $\varepsilon_0 < \varepsilon_1$ узкие пики отсутствуют.

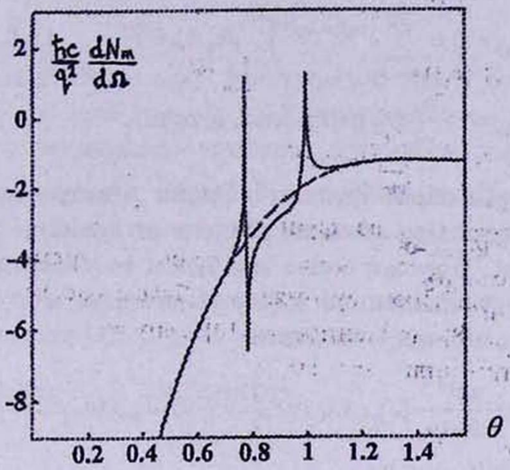

Рис.2. Зависимость величины $\lg[(\hbar c / q^2) dN_m / d\Omega]$ от угла θ при $\varepsilon_0 = \varepsilon_1 = 1$ (пунктирная линия) и $\varepsilon_0 = 3$, $\varepsilon_1 = 1$ (сплошная линия) для значений E=2 MeV, $\rho_1 / \rho_0 = 0.95$, $m = 24$.

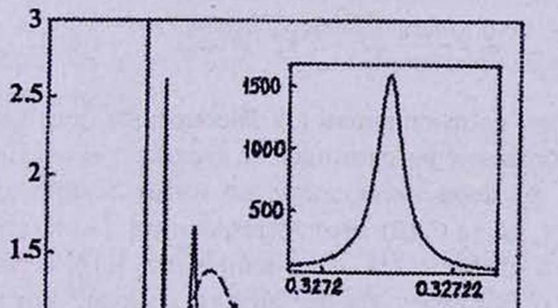

Рис.3. Зависимость $\left(\hbar c / q^2\right) dN_m / d\Omega$ от θ при $\varepsilon_0 = 12$, $\varepsilon_1 = 6$ (сплошная линия) и $\varepsilon_0 = 3$, $\varepsilon_1 = 6$ (пунктирная линия) для E=2 MeV, $\rho_1 / \rho_0 = 0.95$, $m = 24$.

3. Поле излучения внутри цилиндра

В этом разделе мы рассмотрим излучение, распространяющееся внутри цилиндра. В цилиндрической системе координат (ρ,φ,z) соответствующие компоненты вектор-потенциала электромагнитного поля можно представить в виде

$$A_i(\mathbf{r},t)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}e^{im(\varphi-\omega_0 t)}\int_{-\infty}^{+\infty}dk_z A_{mi}e^{ik_z z},\qquad i=1,\ 2,\ 3,$$
$$A_{mi}=-\frac{\nu q}{\pi c}G_{i2}(m,k_z,m\omega_0,\rho,\rho_0),\tag{8}$$

где G_{il} – Фурье-образ функции Грина электромагнитного поля. В сумме по m слагаемое $m=0$ не зависит от времени и не дает вклада в поле излучения. Поэтому ниже мы будем рассматривать случай $m\neq 0$. Подставляя в (8) найденное в [10] выражение для функции G_{i2}, для области внутри цилиндра находим

$$A_{ml}=-\frac{\nu q i^{2-l}}{2\pi c\rho_1}[J_{m+1}(\lambda_0\rho)\overline{B}_m^{(+)}+(-1)^l J_{m-1}(\lambda_0\rho)\overline{B}_m^{(-)}],\ \ l=1,2,$$
$$A_{m3}=0,\ \ \rho<\rho_1,\tag{9}$$

где введены обозначения

$$\overline{B}_m^{(\pm)}=[H_{m\pm1}(\lambda_1\rho_0)\pm\lambda_0\delta_m J_m(\lambda_0\rho_1)H_{m\pm1}(\lambda_1\rho_1)]/W(J_{m\pm1},H_{m\pm1}),\tag{10}$$

$$\lambda_i=\frac{m\omega_0}{c}\sqrt{\varepsilon_i-c^2k_z^2/m^2\omega_0^2},\qquad i=1,\ 2,\tag{11}$$

а δ_m определено соотношением (3). Рассмотрим поле излучения внутри цилиндра на больших расстояниях от заряда, $z\to\infty$. Поскольку в (8) в интеграле по k_z фаза экспоненты не имеет стационарной точки, то при условии $A_{ml}(k_z)\in C_0(R)$ этот интеграл при $z\to\infty$ стремится к нулю быстрее любой степени $1/z$ (см., например, [11]) и поле излучения в этой области отсутствует. Из сказанного следует, что излучение, распространяющееся внутри цилиндра в области $z\to\infty$, соответствует полюсам функции $A_{ml}(k_z)$. Из выражения (9) для этих величин следует, что возможными полюсами являются нули функций $W(J_{m\pm1},H_{m\pm1})$ или полюсы функции δ_m. Детальный расчет показывает, что $A_{ml}(k_z)$ регулярно в нулях функции W, и поэтому первый случай отпадает. Таким образом, единственными полюсами подынтегральной функции (8) являются возможные полюсы функции δ_m. Как следует из выражения (3), эти полюсы являются решениями уравнения

$$\lambda_0 J_m(\lambda_0\rho_1)\sum_{l=\pm1}\frac{lH_{m+l}(\lambda_1\rho_1)}{W(J_{m+l},H_{m+l})}=\frac{2\varepsilon_0}{\varepsilon_1-\varepsilon_0}. \qquad (12)$$

Можно показать, что это уравнение имеет решение только при $\lambda_1^2<0$ (см. приложение), т. е.

$$k_z^2>\frac{m^2\omega_0^2}{c^2}\varepsilon_1. \qquad (13)$$

Заметим, что для этих мод электромагнитные поля во внешнем пространстве ($\rho>\rho_1$) при $\rho>\rho_0$ пропорциональны функции Макдональда $k_m(|\lambda_1|\rho)$ и экспоненциально затухают при удалении от поверхности цилиндра. Таким образом, моды (13) – это именно те моды, которые не могут распространяться во внешнее пространство и остаются внутри цилиндра.

Введя вместо функции Ханкеля функцию Макдональда, уравнение собственных мод (12) можно записать в виде

$$\left[\lambda_0\frac{K'_m(|\lambda_1|\rho_1)}{K_m(|\lambda_1|\rho_1)}+|\lambda_1|\frac{J'_m(\lambda_0\rho_1)}{J_m(\lambda_0\rho_1)}\right]\times$$
$$\times\left[\lambda_0\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}\frac{K'_m(|\lambda_1|\rho_1)}{K_m(|\lambda_1|\rho_1)}+|\lambda_1|\frac{J'_m(\lambda_0\rho_1)}{J_m(\lambda_0\rho_1)}\right]=\frac{m^2}{\rho_1^2}\left(1+\frac{\lambda_0^2}{|\lambda_1|^2}\right)\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}+\frac{|\lambda_1|^2}{\lambda_0^2}\right). \qquad (14)$$

С учетом вышесказанного при больших $|z|$ интеграл по k_z в (8) можно написать в виде суммы вычетов подынтегральной функции в ее полюсах. Пусть $k_z=k_n^{(m)}$ есть корни уравнения (14), пронумерованные индексом n. Полагая $\varepsilon_0=\varepsilon'_0+i\varepsilon''_0$, при малом затухании проекцию k_z можно записать в виде

$$k_z=\pm\sqrt{m^2\omega_0^2\varepsilon'_0/c^2-\lambda_0^2}\pm\frac{i\varepsilon''_0}{\sqrt{m^2\omega_0^2\varepsilon'_0/c^2-\lambda_0^2}}. \qquad (15)$$

С учетом затухания (которое в физически реальных ситуациях всегда присутствует, причем $\varepsilon''_0>0$) отсюда следует, что корни $k_n^{(m)}$ с положительной/отрицательной мнимой частью расположены выше/ниже действительной положительной/отрицательной полуоси в комплексной плоскости k_z. Так как ситуация симметрична, достаточно рассмотреть случай $z>0$. В этом случае контур интегрирования по k_z формулы (8) можно замкнуть полуокружностью большого радиуса в верхней полуплоскости $\mathrm{Im}k_z>0$. При достаточно больших z подинтегральная функция экспоненциально стремится к нулю при стремлении радиуса полуокружности к бесконечности. Из теоремы Коши о вычетах теперь следует, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dk_z A_{mi}(k_z) e^{ik_z z} = 2\pi i \sum_n \operatorname*{Res}_{k_z = k_n^{(m)}} A_{mi}(k_z) e^{ik_z z}, \qquad \mathrm{Re}\, k_n^{(m)} > 0. \tag{16}$$

Вычеты в правой части нетрудно вычислить с учетом выражений (9), (10). Однако получаемые выражения довольно громоздки и мы их здесь выписывать не будем. Заметим лишь, что первые слагаемые в квадратных скобках (10) регулярны и не дают вклада в поле излучения внутри цилиндра. Конкретные расчеты интенсивности внутри цилиндра на основе приведенных формул будут представлены в следующей нашей работе.

Приложение

В данном приложении мы покажем, что уравнение (12) имеет решение только при $\lambda_1^2 < 0$. Это уравнение можно записать в виде

$$\left(\lambda_0 \frac{H_m'}{H_m} - \lambda_1 \frac{J_m'}{J_m}\right)\left(\lambda_0 \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}\frac{H_m'}{H_m} - \lambda_1 \frac{J_m'}{J_m}\right) = \frac{m^2}{\rho_1^2}\left(1 - \frac{\lambda_0^2}{\lambda_1^2}\right)\left(\frac{\lambda_1^2}{\lambda_0^2} - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}\right), \tag{П.1}$$

где $H_m = H_m(\lambda_1\rho_1)$, $J_m = J_m(\lambda_0\rho_1)$, а штрих означает производную по аргументу функции. Вычтя из (П.1) соответствующее комплексно-сопряженное уравнение и воспользовавшись вещественностью λ_i^2, получим

$$\frac{d}{d\rho_1}\left[\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}\ln|H_m|^2 - \frac{\lambda_1^2}{\lambda_0^2}\left(1 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}\right)\ln J_m\right] \cdot \frac{d}{d\rho_1}\ln\left(\frac{H_m^*}{H_m}\right) = 0. \tag{П.2}$$

При мнимом λ_1 это уравнение удовлетворяется тождественно, вследствие того, что второй множитель равен нулю. При действительных же λ_i этот множитель равен $4i/[\pi(J_m^2 + Y_m^2)] \neq 0$ и уравнение (П.2) эквивалентно обращению в нуль первого множителя. Подставляя из этого условия $d(\ln J_m)/d\rho_1$ в уравнение (П.1), после несложных преобразований приходим к уравнению

$$\left|\frac{d}{d\rho_1}\left[\ln\left(\frac{H_m\varepsilon_0}{H_m^*\varepsilon_1}\right)\right]\right|^2 = -\frac{m^4\omega_0^2 k_z^2 \varepsilon_1}{\rho_1^2\lambda_0^2 c^2}\left(1 - \frac{\varepsilon_0^2}{\varepsilon_1^2}\right)^2, \tag{П.3}$$

которое не имеет решений.

Авторы выражают искреннюю благодарность проф. А.Р.Мкртчяну и Л.Ш.Григоряну за постоянный интерес к работе и многочисленные стимулирующие обсуждения.

Работа выполнена в рамках гранта 96-703 Министерства образования и науки РА.

ЛИТЕРАТУРА

1. **А.А.Соколов, И.М.Тернов.** Релятивистский электрон. М., Наука, 1983.
2. **В.Н.Цытович.** Вестник МГУ, № 11, 27 (1951).
3. **K.Kitao.** Progr. Theor. Phys., 23, 759 (1960).
4. **В.П.Зрелов.** Излучение Вавилова-Черенкова и его применение в физике высоких энергий. М., Атомиздат, 1968.
5. **С.Р.Арзуманян, Л.Ш.Григорян, А.А.Саарян.** Изв. НАН Армении, Физика, 30, 99 (1995).
6. **С.Р.Арзуманян, Л.Ш.Григорян, Х.В.Котанджян, А.А.Саарян.** Изв. НАН Армении, Физика, 30, 106 (1995).
7. **Л.Ш.Григорян, Г.Ф.Хачатрян, С.Р.Арзуманян.** Известия НАН Армении, Физика, 33, 267 (1998).
8. **L.Sh.Grigoryan, H.F.Khachatryan,** International Workshop on Radiation Physics with Relativistic Electrons, June 09-12, 1998, Tabarz, Germany, pp.295-296.
9. **L.Sh.Grigoryan, H.F.Khachatryan, P.F.Kazaryan,** 8th International Symposium "Light Sources", 30Aug.–3Sept. 1998, Greifswald, Germany, pp.396-397.
10. **Л.Ш.Григорян, А.С.Котанджян, А.А.Саарян.** Изв. НАН Армении, Физика, 30, 239 (1995).
11. **М.В.Федорюк.** Асимптотика: интегралы и ряды. М., Наука, 1987.

ԴԻԷԼԵԿՏՐԱԿԱՆ ԳԼԱՆԻ ՇՈՒՐՋԸ ՊՏՏՎՈՂ ԼԻՑՔԱՎՈՐՎԱԾ ՄԱՍՆԻԿԻ ՃԱՌԱԳԱՅԹՄԱՆ ԱՌԱՆՁՆԱՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա.Ս. ՔՈԹԱՆՋՅԱՆ, Հ.Ֆ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ, Ա.Վ. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ, Ա.Ա. ՍԱՀԱՐՅԱՆ

Հետազոտված է համասեռ միջավայրում ընկղմված դիէլեկտրական գլանի շուրջը հավասարաչափ պտտվող մասնիկի ճառագայթման ինտենսիվությունը: Ցույց է տրված, որ գլանի ներսում Չերենկովի պայմանը բավարարվելու դեպքում արտաքին միջավայր ճառագայթված քվանտների թվի անկյունային բաշխման մեջ առաջանում են չափազանց նեղ պիկեր: Խնդրի պարամետրերի որոշ արժեքների դեպքում այդ պիկերում քվանտների թվի խտությունը տրված հարմոնիկի համար գերազանցում է համապատասխան մեծությունը վակուումում մոտ 3-4 կարգով: Դիտարկված է նաև գլանի ներսում ճառագայթման դաշտը:

ON THE FEATURES OF RADIATION FROM CHARGED PARTICLE ROTATING AROUND A DIELECTRIC CYLINDER

A.S. KOTANJYAN, H.F. KHACHATRYAN, A.V. PETROSYAN, A.A. SAHARIAN

The intensity of radiation from a charge moving uniformly along the circle around a dielectric cylinder immersed in homogeneous medium is studied. It is shown that when the Cherenkov condition for the material of cylinder and charge speed is satisfied, there appear some narrow peaks in the angular distribution of the number of quanta radiated into the external space. For some values of problem parameters the density of the number of quanta of given harmonic in these peaks exceeds an appropriate value for radiation in vacuum by 3-4 orders of magnitude. The radiation field inside the cylinder is also considered.