

УДК 539

ПОПЕРЕЧНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ СОЛИТОНОВ И ВОЛН
МОДУЛЯЦИЙ С УЧЕТОМ ДИССИПАЦИИ

А.Г. БАГДОЕВ, А.В. ШЕКОЯН

Институт механики НАН Армении

(Поступила в редакцию 17 ноября 1999 г.)

Рассмотрена поперечная устойчивость солитонов и волн огибающих в нелинейной диспергирующей диссипативной среде. Показано, что поперечная устойчивость имеет место при положительном знаке отношения коэффициентов дифракции и дисперсии. Она не зависит от диссипации, и условия устойчивости совпадают как для солитона, являющегося решением эволюционного уравнения, так и для нелинейных волн огибающих. Изучено условие существования солитонного решения.

В работе [1] показано, что при изучении ионно-звуковых нелинейных волн в плазме необходимо пользоваться двухмерной моделью. В [1,2] изучена устойчивость солитонных решений эволюционных уравнений при поперечных возмущениях, но не учтено поглощение. В работах [3-5] указано на существенность учета поглощения и выведено трехмерное эволюционное уравнение со сложным механизмом поглощения нелинейных волн, которое имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \tau} + \frac{1}{2} L \Delta_{\perp} u = p \frac{\partial}{\partial \tau} \left(u \frac{\partial u}{\partial \tau} \right) + D \frac{\partial^3 u}{\partial \tau^3} - E \frac{\partial^4 u}{\partial \tau^4} + N \frac{\partial^5 u}{\partial \tau^5}, \quad (1)$$

где x — координата, вдоль которой распространяется волна, $\Delta_{\perp} \equiv \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, $\tau = xc_n^{-1} - t$, c_n — линейная нормальная скорость волны, u — возмущенная нормальная к волне скорость частиц, L , p , E , D и N — соответственно дифракционный, нелинейный, дисперсионный и диссипативные коэффициенты, вид которых не приводится.

В работе [6] получено солитонное решение уравнений (1), однако не изучена устойчивость полученного решения. Вместе с тем представляет интерес выяснить, как влияют поглощение, дисперсия и

дифракция на устойчивость солитона. Целью настоящей работы является решение последней задачи.

Введем обозначения

$$\begin{aligned} v &= -pu(6E)^{-1}, L(2E)^{-1} = 3\beta^2\sigma, \sigma = \pm 1, x = tE^{-1}, \\ DE^{-1} &= \beta^2\kappa, NE^{-1} = \beta^2\zeta, T = \beta t, \theta = x - \eta^2 t, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\beta = (|L(6E)^{-1}|)^{1/2}$ – малый постоянный параметр, характеризующий отклонение решения эволюционного уравнения от одномерного недиссипативного случая, $\eta = \text{const}$ [1,7]. Тогда в переменных θ, T, y, z уравнение (1) примет вид

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(-4\eta^2 \frac{\partial v}{\partial \theta} + 6v \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial^3 v}{\partial \theta^3} \right) = -\beta \frac{\partial^2 v}{\partial T \partial \theta} - 3\beta^2 \sigma \Delta_{\perp} v + \beta^2 \left(\kappa \frac{\partial^3 v}{\partial \theta^3} + \zeta \frac{\partial^5 v}{\partial \theta^5} \right). \quad (3)$$

Невозмущенное одномерное решение, т.е. когда $\beta = 0$, можно искать в виде солитона [7]:

$$v_0 = 2\eta^2 \operatorname{sech}^2 \eta \theta_2, \quad \theta_2 = \theta - \theta_0(T, y, z), \quad (4)$$

где θ_0 – некоторая добавочная фаза, подлежащая определению.

Решение уравнения (3), как и в [7], ищется в виде

$$v = v_0 + \beta v_1 + \beta^2 v_2 + \dots \quad (5)$$

Подставляя (5) в (3) и приравнивая члены порядка β и β^2 , можно получить следующую систему уравнений:

$$L(v_n) = -4\eta^2 \frac{\partial v_n}{\partial \theta} + 6 \frac{\partial}{\partial \theta} (v_0 v_n) + \frac{\partial^3 v_n}{\partial \theta^3} + \frac{\partial^3 v_n}{\partial \theta^3} = F_n \quad (n=1,2,\dots), \quad (6)$$

и поскольку в силу (4)

$$\frac{\partial v_0}{\partial T} = -\frac{\partial v_0}{\partial \theta} \frac{\partial \theta_0}{\partial T} = -F_1, \quad (7)$$

то для F_2 можно получить

$$F_2 = -\frac{\partial v_1}{\partial T} - 3\sigma \int_{-\infty}^{\infty} \Delta_{\perp} v_0 d\theta' + \kappa \frac{\partial^2 v_0}{\partial \theta^2} + \zeta \frac{\partial^4 v_0}{\partial \theta^4} - 6v_1 \frac{\partial v_1}{\partial \theta}. \quad (8)$$

Учитывая, что при $\theta = \pm \infty$

$$\frac{\partial v_{0,1}}{\partial \theta} = -\frac{\partial^2 v_{0,1}}{\partial \theta^2} = 0,$$

из (6) следует соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_{1,2} d\theta = 0. \quad (9)$$

В силу (7) следует, что (9) удовлетворится для $n = 1$. Чтобы записать условия для $n = 2$, следует найти решение v_1 уравнения (6) при $n = 1$, которое, как показано в [7], имеет вид

$$v_1 = \frac{1}{8\eta^2} \frac{\partial \theta_0}{\partial T} (2v_0 + \theta_2 \frac{\partial v_0}{\partial \theta}). \quad (10)$$

Учитывая, что существенны лишь четные члены (9) по θ , можно записать

$$\frac{\partial v_0}{\partial y} = -\frac{\partial v_0}{\partial \theta} \frac{\partial \theta_0}{\partial y}, \quad \frac{\partial v_0}{\partial z} = -\frac{\partial v_0}{\partial \theta} \frac{\partial \theta_0}{\partial z}, \quad \Delta_{\perp} v_0 \approx -\frac{\partial v_0}{\partial \theta} \Delta_{\perp} \theta_0.$$

Тогда для $n = 2$ следует

$$-\frac{1}{2\eta^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial T^2} (2v_0 + \theta \frac{\partial v_0}{\partial \theta}) d\theta + 3\sigma \Delta_{\perp} \theta_0 \int_{-\infty}^{+\infty} v_0 d\theta = 0, \quad (11)$$

где учтено, что имеет место соотношение

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_{\perp} v_0 d\theta' \approx -v_0 \Delta_{\perp} \theta_0.$$

Вычисляя в (11) второе слагаемое в скобке, можно получить

$$\frac{\partial^2 \theta_0}{\partial T^2} - 24\sigma \eta^2 \Delta_{\perp} \theta_0 = 0. \quad (12)$$

При $\sigma = 1$ получается волновое уравнение, которое имеет ограниченное решение, и поэтому в силу (2) в случае

$$LE^{-1} > 0 \quad (13)$$

одномерный недиссипативный солитон устойчив по отношению к поперечным и диссипативным возмущениям. Физический смысл (13) заключается в том, что знак отношения коэффициента дифракции L к коэффициенту дисперсии E определяет поперечную устойчивость солитона независимо от диссипации.

Из соотношения (13) следует, что условие поперечной устойчивости солитонов не зависит от диссипации, которая влияет только на само решение [6], но не на характер устойчивости.

Интересно отметить, что (13) совпадает с условием модуляционной поперечной устойчивости волн огибающих, найденным в работе [3], для которых так же, как и для солитонов, в основных порядках диссипация хотя и влияет на решение [3,4], но не влияет на условие поперечной устойчивости.

Отметим в качестве примера задачу распространения волн модуляции в микрополярной электропроводящей газожидкостной смеси [3], для которой $E > 0$, причем для точечной быстрой магнитогазодинамической волны $L > 0$ и волны модуляции устойчивы. Тот же вывод имеет место и для поперечной устойчивости солитона, в то время как для вогнутых участков медленных точечных волн $L < 0$, и волны модуляции так же, как и солитоны, в поперечном направлении неустойчивы. Укажем, что рассмотренную в [3] модель электропроводящей среды можно использовать при описании волнового движения в плазме.

Необходимо отметить, что хотя и при $E, L > 0$ солитоны в поперечном направлении устойчивы, они при некоторых L могут не существовать. Этот вывод следует из недиссипативного решения уравнения (1), приведенного, например, в статье [6]:

$$-\frac{p}{6}U_0 = \frac{c}{2} \operatorname{sech}^2[(2a)^{-1}(cE^{-1})^{1/2}\xi], \quad (14)$$

где $\xi = at + by + dz - kx$, $c = [ak - L(b^2 + d^2)]a^{-2}$, a , k , b и d — постоянные. Как видно из (14), при некоторых $L > 0$ получается $c < 0$, причем аргумент гиперболического секанса мнимый и решение не ограничено, т.е. солитон в обычном смысле не существует. Для существования и устойчивости солитона при $L > 0$ необходимо считать $c > 0$, что соответствует ограниченному значению L . В случае $E < 0$, т.е. положительной дисперсии, имеющем место, например, для задачи волнового движения в релаксирующей газодинамической среде, а также при некоторых соотношениях в пьезоэлектрике [5], неравенство (13) не выполняется, поскольку в указанных средах $L > 0$, $E < 0$, и имеет место поперечная неустойчивость как солитонов, так и волн огибающих.

Следует отметить, что из решения (14) и выражений для ξ и c следует, что солитонное решение типа (14) существует для $cE^{-1} > 0$, при этом могут быть как положительные, так и отрицательные солитоны, в зависимости от знака cp^{-1} .

ЛИТЕРАТУРА

1. Б.Б.Кадошцев, В.И.Петвиашвили. ДАН СССР, 192, №4, 753 (1970).
2. Б.Е.Захаров. Письма в ЖЭТФ, 22, 364 (1975).
3. А.Г.Багдоев, Л.Г.Петросян. Изв. АН Арм.ССР, Механика, 36, №5, 3 (1983).
4. A.G.Bagdoyev, A.V.Shekoyn. Int J. Non-Linear Mechanics, 32, №2, 385 (1997).
5. А.Г.Багдоев, А.В.Шекоян. Изв. НАН Армении, Механика, 48, №1, 64 (1995).
6. А.В.Шекоян. Изв. НАН Армении, Физика, 33, №4, 187 (1998).
7. М.Абловиц, Х.Сигур. Солитоны и метод обратной задачи. М., Мир, 1987.

ՍՈԼԻՏՈՆՆԵՐԻ ԵՎ ՍՈԴՈՒՎԱԾ ԱԼԻՔՆԵՐԻ ԼԱՅՆԱԿԱՆ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆԸ ԴԻՍԻՊԱՅԻԱՅԻ ՀԱՇՎԱՌՈՒՄՈՎ

Ա.Գ. ԲԱԳԴՈԵՎ, Ա.Վ. ՇԵԿՈՅԱՆ

Ուսումնասիրված են սոլիտոնների և պարուրիչ (մոդուլված) ոչ գծային ալիքների կայունության հարցերը, երբ հաշվի են առնվում դիսպացիան և դիսպերսիան: Ցույց է տրված, որ վերը նշված ալիքների լայնական կայունությունը կախված է դիֆրակցիայի և դիսպերսիայի գործակիցների հարաբերության նշանից և կախված չէ դիսպացիայից:

TRANSVERSAL STABILITY OF SOLITONS AND MODULATION WAVES WITH ALLOWANCE FOR DISSIPATION

A.G.BAGDOEV, A.V.SHEKOYAN

The transversal stability of solitons and envelope waves in nonlinear dispersive dissipative medium is considered. It is shown that transversal stability takes place for positive sign of ratio of diffraction and dispersion coefficients. It does not depend on dissipation, and stability conditions coincide both for soliton being a solution of evolution equation and for the nonlinear modulation waves. The conditions of existence of soliton solution are obtained.