Известия НАН Армении, Физика, т.34, №1, с.24-28 (1999)

УДК 621.315.592

РЕЛЯТИВИСТСКИЙ АТОМ ВОДОРОДА В СИЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

А. А. АВЕТИСЯН, А. П. ДЖОТЯН, Э. М. КАЗАРЯН,
А. А. САРКИСЯН

Ереванский государственный университет

(Поступила в редакцию 7 июля 1998г.)

Определены уровни энергии релятивистского атома водорода в сильном магнитном поле. Показано, что учет релятивизма приводит к монотонному росту энергии связи основного состояния с ростом магнитного поля, более быстрому, чем в нерелятивистском случае.

1. Введение

Необходимость дальнейшего исследования водородоподобных систем, имеющих в физике полупроводников непосредственный выход в физику примесных и экситонных состояний, диктуется потребностями и прогрессом современной полупроводниковой электроники и чисто научным интересом к специфике этих состояний в наиболее актуальных ее объектах – 0D, 1D и 2D системах [1,2], а также к их поведению во внешних электрическом и магнитном полях [3-5]. Подобные исследования представляют интерес также для астрофизики и физики плазмы.

Как известно, в полупроводниках экстремально сильные магнитные поля, приводящие к “игольчатой” структуре атома водорода, из-за малости эффективной массы носителей заряда реализуются уже при величинах $H \sim 10^5$ Э. Ситуация здесь во многом аналогична той, которая имеет место в 1D системах (тонких полупроводниковых проволоках при толщинах, меньших боровского радиуса экситона.

При квадратичном законе дисперсии уровни энергии атома водорода в сильном магнитном поле, при $a_H \ll a_B$ (a_H – магнитная длина, $a_B = \hbar^2 / me^2$ – боровский радиус) определены в работе [6]. Между тем, закон дисперсии носителей заряда в наиболее часто используемых в микроэлектронике полупроводниковых соединениях A^3B^5 существенно непараболичен (закон дисперсии Кейна [7], аналогичный релятивистскому в двухзонном приближении). В связи с этим представляет интерес решение аналогичной задачи с релятивистским законом дисперсии носителей заряда. Нами обсуждается также вопрос применения полученных результатов для случая мелких примесных и экситонных состояний в кейновском полупроводнике.

2.1. Энергия связи основного состояния релятивистского атома водорода в сильном магнитном поле

Уравнение Клейна-Гордона для релятивистского электрона в поле ядра в присутствии магнитного поля H имеет вид

$$\left[\left(\hat{\mathbf{P}}+\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 c^2+m_0^2c^4\right]\psi=\left(\varepsilon+\frac{e^2}{r}\right)^2\psi, \tag{1}$$

где $\mathbf{A}$ – вектор-потенциал поля, m_0 – масса покоя, ε – энергия электрона. При $\mathbf{H}\parallel OZ$ и выборе $\mathbf{A}=(A_\varphi=H\rho/2,\ A_z=A_\rho=0)$ уравнение (1) в цилиндрических координатах запишется как

$$\begin{gathered}-\frac{\hbar^2}{2m_0}\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right)+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}\right]-\frac{i\hbar\omega_H}{2}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}+\\+\frac{m_0\omega_H\rho^2}{8}\psi+U(r)\psi=\frac{\varepsilon^2-m_0^2c^4}{2m_0c^2}\psi,\end{gathered} \tag{2}$$

где $\omega_H=\dfrac{eH}{m_0c}$, а роль потенциальной энергии играет функция

$$U(r)=-\frac{e^2\varepsilon}{m_0c^2r}-\frac{e^4}{2m_0c^2r^2}. \tag{3}$$

При поставленном условии $a_H \ll a_B$ влияние кулоновского поля ядра на движение электрона в поперечной к $\mathbf{H}$ плоскости можно рассматривать как малое возмущение [6,8], не меняющее дискретного характера энергетического спектра в плоскости XOY. Соответственно при разделении переменных в уравнении (2) радиальные функции берем в прежнем виде [6,8]; низшему уровню отвечают значения квантовых чисел $n_\rho=m=0$. Подставив в уравнение (2) $\psi=R_{00}(\rho)X_0(z)$, умножив затем это уравнение на $R_{00}(\rho)$ и проинтегрировав по $\rho d\rho$, получим для $X_0(z)$ одномерное уравнение Шредингера

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0}X_0''(z)+\overline{U}(z)X_0(z)=\varepsilon_{z0}X_0(z), \tag{4}$$

где ε_{z0} – энергия наинизшего кулоновского уровня

$$\varepsilon_{z0}=\frac{\varepsilon_0^2-m_0^2c^4}{2m_0c^2}-\frac{\hbar\omega_H}{2}, \tag{5}$$

соответствующая энергии ε_0 основного состояния системы, а

$$\overline{U}(z)=\int_0^\infty U(\sqrt{z^2+\rho^2})R_{00}^2(\rho)\rho d\rho. \tag{6}$$

Для дискретного уровня энергии ε_{z0}, согласно [8], имеем

$$\varepsilon_{z0} = -\frac{m_0}{2\hbar^2}\left[\int\limits^{\infty}\overline{U}(z)dz\right]^2. \tag{7}$$

В соответствии с (3) $\overline{U}(z)$ представим в виде

$$\overline{U}(z) = \overline{U}_1(z) + \overline{U}_2(z) = -\frac{e^2\varepsilon}{m_0c^2}\int\limits_0^{\infty}\frac{R_0^2(\rho)\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}} - \frac{e^4}{2m_0c^2}\int\limits_0^{\infty}\frac{R_{00}^2(\rho)\rho d\rho}{(\rho^2+z^2)}. \tag{8}$$

После интегрирования для $\overline{U}_1(z)$ и $\overline{U}_2(z)$ получаем

$$\overline{U}_1(z) = -\frac{e^2\varepsilon}{m_0c^2}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2a_H}}e^{\frac{z^2}{2a_H^2}}\left[1-\Phi\left(\frac{z}{\sqrt{2}a_H}\right)\right], \tag{9}$$

$$\overline{U}_2(z) = \frac{e^4}{4m_0c^2a_H^2}e^{\frac{z^2}{2a_H^2}}\,\mathrm{Ei}\left(-\frac{z^2}{2a_H^2}\right), \tag{10}$$

где $\Phi(x)$ – интеграл вероятности, а $\mathrm{Ei}(x)$ – интегральная показательная функция [9].

Используя выражения (9)-(10), из (7) и (5) находим уравнение для определения энергии основного состояния системы:

$$\frac{\varepsilon_0^2 - m_0^2c^4}{2m_0c^2} - \frac{\hbar\omega_H}{2} = -\frac{m_0}{2\hbar^2}\left[\frac{2e^2\varepsilon_0}{m_0c^2}\ln\frac{a_B}{a_H} + \frac{e^4\pi^{3/2}}{2\sqrt{2m_0}\,c^2a_H}\right]^2. \tag{11}$$

Физический смысл имеет лишь следующее решение уравнения (11):

$$\varepsilon_0 = \frac{-(2\pi)^{3/2}\alpha^2R_0x\ln x + \sqrt{4m_0c^2(m_0c^2+\hbar\omega_H)(1+4\alpha^2\ln^2 x) - 2\alpha^2\pi^3R_0^2x^2}}{2(1+4\alpha^2\ln^2 x)}, \tag{12}$$

где $x = a_B/a_H$, $\alpha = e^2/\hbar c$, $R_0 = m_0e^4/2\hbar^2$.

Для энергии ε_{z0} находим

$$\begin{aligned}\varepsilon_{z0} = {} & \{2(2\pi)^{3/2}\alpha^2R_0x\ln x \times \\ & \times[2^{1/2}\pi^{3/2}\alpha^2R_0x\ln x - \sqrt{4m_0c^2(m_0c^2+\hbar\omega_H)(1+4\alpha^2\ln^2 x) - 2\alpha^2\pi^3R_0^2x^2}\,] - \\ & -16\alpha^2m_0c^2(m_0c^2+\hbar\omega_H)(1+4\alpha^2\ln^2 x)\ln^2 x - 2\alpha^2\pi^3R_0^2x^2\} \times \\ & \times[8m_0c^2(1+8\alpha^2\ln^2 x+16\alpha^2)\ln^4 x)]^{-1}.\end{aligned} \tag{13}$$

В пределе при $\alpha \to 0$ $(c \to \infty)$ из (13) получаем выражение для энергии связи основного состояния в нерелятивистском случае:

$$\varepsilon'_{z0} = -\frac{2m_0e^4}{\hbar^2}\ln^2\frac{a_B}{a_H}. \tag{14}$$

Графики функций $\varepsilon_{z0}(x)$ и $\varepsilon'_{z0}(x)$ приведены на рис.1.

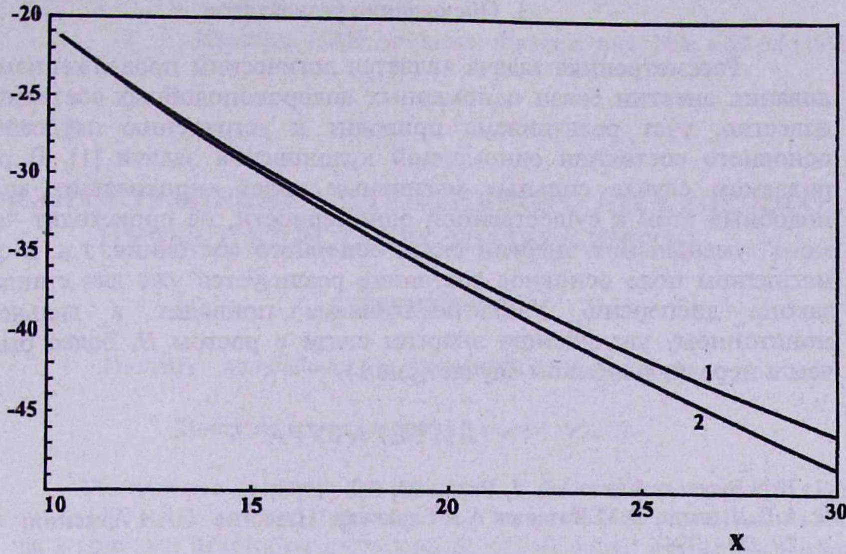

Рис.1. Зависимость энергии связи основного состояния атома водорода как функция от $x = a_B / a_H$ (в единицах $R_0 = m_0 e^4 / 2\hbar^2$): 1) для нерелятивистского атома водорода; 2) для релятивистского атома водорода.

Для возбужденных состояний $(z \sim a_B >> \rho)$ получаем одномерное уравнение Клейна-Гордона

$$X'' + \frac{1}{\hbar^2 c^2}\left[\varepsilon^2 + \frac{2e^2\varepsilon}{z} + \frac{e^4}{z^2} - m_0^2 c^2 \hbar\omega_H\right] X = 0\,,$$

по форме совпадающее с уравнением, рассмотренным в [1].

2.2. Примесные состояния в полупроводнике с узкой запрещенной зоной

Полученные в 2.1 результаты могут быть непосредственно распространены и обобщены для случая мелких примесных и экситонных состояний в полупроводниках с кейновским законом дисперсии (двухзонное приближение). В случае неподвижного примесного центра налицо полная аналогия с задачей атома водорода при замене скорости света c на характерный для полупроводников A^3B^5 параметр s ($s = 10^8$ м/с), описывающий “взаимодействие” зон, массы покоя электрона m_0 – на эффективную массу m^*, заряда e – на эффективный заряд $e^* = e/\sqrt{\chi}$ (χ – диэлектрическая проницаемость полупроводника) и постоянной тонкой структуры α – на $\alpha^* = e^{*2}/\hbar s$.

Благодаря равенству эффективных масс электрона и дырки в используемом двухзонном приближении, уравнение для экситонных состояний после перехода к системе центра масс приводится к идентичному с (1) для частицы с массой $m^*/2$ и зарядом $e^*/2$.

3. Обсуждение результатов

Рассмотренная задача является логическим продолжением исследования энергии связи одномерных водородоподобных состояний. Как известно, учет релятивизма приводит к устранению неустойчивости основного состояния одномерной кулоновской задачи [1]. В рассматриваемом случае сильных магнитных полей, приводящих водородоподобный атом к существенной одномерности, не происходит “ожидаемого” уменьшения энергии связи основного состояния, т.к. в сильном магнитном поле основное состояние реализуется уже для стандартного закона дисперсии. Учет релятивизма приводит к дальнейшему, монотонному увеличению энергии связи с ростом H, более быстрому, чем в нерелятивистском случае (рис.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. **H.N.Spector, J.Lee.** Am. J. Phys., **53**, 248 (1985).
2. **А.П.Джотян, Э.М.Казарян, А.А.Саркисян.** Известия НАН Армении, Физика, **29**, 90 (1994).
3. **M.Bayer, P.Ils, M.Michel,** and **A.Forchel.** Phys. Rev. B, **53**, 4668 (1996).
4. **D.Vin, R. Del Sole.** Solid State Commun., **97**, 985 (1996).
5. **P.W.Barmby, J.L.Dunn** and **C.A.Bates.** Phys. Rev. B, **54**, 8586 (1996).
6. **R.J.Elliott** and **R.Loudon.** J. Phys. Chem. Sol., **15**, 196 (1960).
7. **E.O.Kane.** J. Phys. Chem. Sol., **1**, 249 (1957).
8. **Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц.** Квантовая механика, М., Наука, 1989.
9. **И.С.Градштейн, И.М.Рыжик.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.

ՋՐԱԾՆԻ ՌԵԼՅԱՏԻՎԻՍՏԱԿԱՆ ԱՏՈՄԸ ՈՒԺԵՂ ՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԴԱՇՏՈՒՄ

Ա. Ա. ԱՎԵՏԻՍՅԱՆ, Ա. Պ. ՋՈԹՅԱՆ, Է. Մ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, Հ. Ա. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

Որոշված են ռելյատիվիստական ջրածնի ատոմի էներգիայի մակարդակները ուժեղ մագնիսական դաշտում: Ցույց է տրված, որ ռելյատիվիզմը բերում է մագնիսական դաշտից կապի էներգիայի կախվածության ավելի արագ աճին, քան ոչ ռելյատիվիստական դեպքում:

RELATIVISTIC HYDROGEN ATOM IN A HIGH MAGNETIC FIELD

A. A. AVETISYAN, A. P. DJOTYAN, E. M. KAZARYAN, H. A. SARKISYAN

Energy levels of a relativistic hydrogen atom in a high magnetic field have been studied. The account of relativity causes à monotonous increase of the binding energy of the ground state with the magnetic field increase, which is more rapid, than in the nonrelativistic case.