Известия НАН Армении, Физика, т. 33, №4, с. 187—190 (1998)

УДК 539

ПРИБЛИЖЕННОЕ ТРЕХМЕРНОЕ СОЛИТОННОЕ РЕШЕНИЕ ПРИ НАЛИЧИИ ДИСПЕРСИИ И ДИССИПАЦИИ

А. В. ШЕКОЯН

Институт механики НАН Армении

(Поступила в редакцию 27 ноября 1997г.)

В статье исследовано трехмерное нелинейное эволюционное уравнение пятой степени, описывающее нелинейные волновые процессы в различных сложных средах с дисперсией и различными механизмами поглощения. Показано, что указанное уравнение имеет солитонное решение, и исследовано, как влияет диссипация на профиль солитона.

За последние годы появились работы, в которых изучаются нелинейные волны в различных средах со сложной структурой — таких, как пьезодиэлектрик с внедренными сферическими неоднородностями, вязкостью и теплопроводностью [1], вязкоупругая среда с полостями, жидкость с пузырьками газа и химическими реакциями [2], электропроводящие микрополярные жидкости [3], грунты [4] и т. д.

Для описания нелинейных волн в вышеуказанных средах выводятся нелинейные трехмерные эволюционные уравнения, которые в общем случае имеют следующий вид:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial x}+L\Delta_\perp\psi=\alpha\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\psi\frac{\partial\psi}{\partial\tau}\right)+\delta\frac{\partial^3\psi}{\partial\tau^3}+\beta\frac{\partial^4\psi}{\partial\tau^4}+\gamma\frac{\partial^5\psi}{\partial\tau^5}, \quad (1)$$

где $\tau=xv^{-1}-t$—эйконал, x—координата, вдоль которой распространяется нелинейная волна, а y и z—координаты, перпендикулярные направлению распространения волны, t—время, v—линейная скорость волны, ψ—скорость движения среды (например, в статьях [1,4] $\psi=\frac{\partial u_3}{\partial\tau}$, где u_3—смещение), $\Delta_\perp=\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$. Коэффициенты L, α, δ, β, и γ содержат постоянные, характеризующие упругие, нелинейные, вязкостные, теплопроводящие, дифракционные, электрические и другие свойства среды, а также параметры, характеризующие волну. Коэффициент L характеризует поперечные свойства среды и волны, α—нелинейный коэффициент, δ и γ характеризуют диссипативные свойства среды, обусловленные различными механизмами поглощения (например, для вязкой жидкости с пузырьками газа δ связан с вязкостью жидкости, а γ—с поглощением, обусловленным наличием пузырьков), β обусловлен дисперсионными свойствами среды.

Уравнение (1) выводится в предположении малости изменения профиля волны на конечных расстояниях (см., например, [5]). Если ограничиться одномерным приближением ($\Delta_\perp=0$) и считать, что нет поглощения, т. е. в (1) отсутствуют слагаемые $\frac{\partial^3\psi}{\partial\tau^3}$ и $\frac{\partial^5\psi}{\partial\tau^5}$, то получится уравнение Кортевега де Вриза с точностью до коэффициентов. В этом случае есть конкурирующие нелинейность и дисперсия. Уравнение Кортевега де Вриза имеет солитонное решение (см., например, [6]). В работе [7] введено трехмерное эволюционное уравнение типа (1) для недиссипативной, но диспергирующей среды, которое в дальнейшем получило название уравнения Кадомцева-Петвиашвили. Это уравнение допускает солитонное решение [8]. В работе [9] исследовано уравнение типа (1), где положено $L=\gamma=0$, т. е. рассмотрено одномерное уравнение, где учитываются дисперсия и диссипативный член, соответствующий кубично дифференцированному слагаемому. Для его изучения использован метод медленно меняющейся амплитуды для слабой диссипации.

Цель настоящей статьи—показать, что уравнение (1) имеет решение солитонного типа, найти его вид и исследовать его.

Для дальнейших расчетов удобно ввести новую функцию $u=-\frac{\alpha}{6}\psi$, тогда (1) преобразуется к следующему виду:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial\tau}+L\Delta_\perp u=-6\frac{\partial}{\partial\tau}\left(u\frac{\partial u}{\partial\tau}\right)+\delta\frac{\partial^3 u}{\partial\tau^3}+\beta\frac{\partial^4 u}{\partial\tau^4}+\gamma\frac{\partial^5 u}{\partial\tau^5}. \tag{2}$$

Решение уравнения (1) будем искать в виде

$$u=\varphi(\xi), \tag{3}$$

где $\xi=a\tau+by+dz-kx$, b и d—постоянные, которые показывают наклон плоскости фронта ($\xi=\text{const}$) к оси x, a и k—постоянные, имеющие размерность частоты и волнового числа. Подставляя (3) в (2), дважды интегрируя, считая, что при стремлении ξ к бесконечности u стремится к нулю, можно постоянные интегрирования считать равными нулю и получить следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$-a^2\beta\frac{d^2\varphi}{d\xi^2}+3\varphi^2-c\varphi=a\delta\frac{d\varphi}{d\xi}+a^3\gamma\frac{d\varphi^3}{d^3\xi}, \tag{4}$$

где

$$c=[ak-L(b^2+d^2)]a^{-2}.$$

Уравнение (1) выведено для слабо диспергирующих и поглощающих сред, однако, если поглощение слабее, чем дисперсия, т. е. коэффициенты δ и γ меньше, чем β, то уравнение (4) можно решать методом медленно меняющейся амплитуды [9]. Следуя этому методу, решение уравнения (4) будем искать в виде

$$\varphi=\varphi_0(\xi)[1+T(\xi)], \tag{5}$$

причем требуется выполнение следующих неравенств:

$$T \ll 1, \quad \frac{d^2T}{d\xi^2} \ll \frac{dT}{d\xi} \ll T. \tag{6}$$

Физический смысл этих неравенств заключается в том, что из-за диссипации форма солитона мало меняется, функция T плавная, так что она и ее производные меняются слабо.

В выражении (5) $\varphi_0(\xi)$ есть солитонное решение уравнения (2), если в нем положить $\delta=\gamma=0$. Это решение имеет вид [8]:

$$\varphi_0(\xi) = \frac{c}{2}\,\mathrm{sech}^2\left(\frac{1}{2a}\sqrt{-\frac{c}{\beta}}\,\xi\right), \tag{7}$$

где $c \geqslant 0, a > 0$. Этот солитон распространяется со скоростью

$$V_c^2 = a^2[(av^{-1}-k)^2+b^2+d^2]^{-1}.$$

Подставляя (5) в уравнение (4), учитывая неравенства (6) и пользуясь соотношением (7), можно получить для T следующее выражение:

$$T = \frac{(-c\beta)^{-1/2}}{3}\left[-\frac{6\gamma c}{\beta}\,\mathrm{th}\left(\frac{\xi}{2a}\sqrt{-\frac{c}{\beta}}\right) - \left(\delta - \frac{\gamma c}{\beta}\right)\mathrm{sh}\left(\frac{\xi}{a}\sqrt{-\frac{c}{\beta}}\right)\right]. \tag{8}$$

Следует отметить, что при стремлении ξ к бесконечности T тоже стремится к бесконечности, т. е. для больших ξ первое неравенство в (6) не выполняется. Решение (8) для больших ξ теряет смысл. Оно описывает искажение формы солитона только вблизи вершины солитона.

Для малых ξ выражение (7) можно упростить и функция T имеет вид

$$T = \frac{2\delta + 4\gamma c\beta^{-1}}{6a\beta}\,\xi = \frac{M}{6a\beta}\,\xi. \tag{9}$$

Теперь видно, что а) если $M>0$, то $T>0$ при $\xi>0$ и $T<0$ при $\xi<0$; б) когда $M<0$, то получается наоборот: $T<0$ при $\xi>0$ и $T>0$ при $\xi<0$. Из этих неравенств видно, как изменяется форма солитона по отношению к симметричной форме недиссипативного солитона, определенной по формуле (7). В случае а) солитон смещается влево, но так, что вершина солитона остается неподвижной (при $\xi=0$ $\varphi=\varphi_0$). В случае б) аналогичным образом профиль солитона смещается вправо. Проиллюстрируем полученный результат на примере, когда нелинейная волна распространяется в пьезодиэлектрике со сферическими внедрениями. Воспользовавшись значениями коэффициентов уравнения (1), приведенными в [1], для величины M получим

$$M = \frac{v}{m}\left(\gamma^2\chi T_1 c_1^{-1} - \eta\right) - \frac{4cl_0^2(2w^3+1)}{v^2(2w^2+1)}, \tag{10}$$

где v—линейная скорость волны в данной среде, γ, χ и η—соответственно коэффициенты термичности, температуропроводности и вязкости среды, c_1—теплоемкость, l_0—размер шарика, w—отношение продольной и поперечной скоростей упругой волны, m—электроупругий параметр среды ($m>0$), T_1—температура среды. Из выражения (10) видно, что при большой вязкости, когда выполняется условие

$$\frac{v\gamma_1^2\chi T_1}{c_1 m} < \frac{v r}{m} + \frac{4cl_0^2(2w^3+1)}{v^2(2w^3+1)},$$

$M<0$ и солитон будет иметь форму случая б). При обратном неравенстве $M>0$ солитон имеет форму случая а).

Интересен случай, когда $M=0$, который также можно осуществить. Это означает, что различные механизмы поглощения и дисперсия компенсируют друг друга, и солитон распространяется, как в недиссипативной среде.

Автор благодарит А. Г. Багдоева за неоднократные ценные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **А. Г. Багдоев, А. В. Шекоян.** Изв. НАН Армении, Механика, **48**, №1, 64(1995).
2. **А. Г. Багдоев, Г. Г. Оганян.** Изв. АН АрмССР, Механика, **37**, №1, 4(1984).
3. **А. Г. Багдоев, Л. Г. Петросян.** Изв. АН АрмССР, Механика, **36**, №5, 3(1983).
4. **A. G. Bagdoev, A. V. Shekoyan.** Int. J. Non-linear Mechanics, **32**, № 2, 385 (1997).
5. **Н. С. Бахвалов, Я. М. Жилейкин, Е. А. Заболотская.** Нелинейная теория звуковых пучков. М., Наука, 1982.
6. **В. И. Карпман.** Нелинейные волны в диспергирующих средах. М., Наука, 1973.
7. **Б. Б. Кадомцев, В. И. Петвиашвили.** Доклады АН СССР, **192**, №4, 753 (1970).
8. **И. Т. Селезов, С. В. Корсунский.** Нестационарные нелинейные волны в электропроводящих средах. Киев, Наукова думка, 1991.
9. **Ю. В. Чугаевский.** Элементы теории нелинейных и быстропеременных волновых процессов. Кишинев, Штиинца, 1974.

APPROXIMATE THREE-DIMENSIONAL SOLITON SOLUTION IN THE PRESENCE OF DISPERSION AND DISSIPATION

A. V. SHEKOYAN

In this paper the nonlinear evolution equation of fifth degree describing the nonlinear wave processes in various complex media with dispersion and dissipation is investigated. It is shown that this equation has a soliton solution and an influence of dissipation on the profile of soliton is studied.

ՄՈՏԱՎՈՐ ԵՌԱՉԱՓ ՍՈԼԻՏՈՆԱՅԻՆ ԼՈՒԾՈՒՄԸ ԴԻՍՊԵՐՍԻԱՅԻ ԵՎ ԴԻՍԻՊԱՑԻԱՅԻ ԱՌԿԱՅՈՒԹՅԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ա. Վ. ՇԵԿՈՅԱՆ

Հոդվածում ուսումնասիրված են եռաչափ, ոչ գծային հինգերորդ աստիճանի էվոլյուցիոն հավասարումները, որոնք նկարագրում են ոչ գծային ալիքային երևույթները տարբեր, բարդ կառուցվածք և դիսիպացիայի տարբեր ձևեր ունեցող, միջավայրերում։ Ցույց է տրված, որ նշված հավասարումները ունեն սոլիտոնային լուծումներ։ Ուսումնասիրված է դիսիպացիայի ազդեցությունը սոլիտոնի կորվածքի վրա։