

УДК 539.2

ЛОКАЛИЗАЦИЯ ЭЛЕКТРОНА НА ОДНОМЕРНОЙ ЦЕПОЧКЕ ИЗ ПЕРИОДИЧЕСКИ РАСПОЛОЖЕННЫХ СЛУЧАЙНЫХ  $\delta$ -ПОТЕНЦИАЛОВ

Д. М. СЕДРАКЯН, Д. А. БАДАЛЯН

Ереванский государственный университет

А. Ж. ХАЧАТРЯН

Государственный инженерный университет Армении

(Поступила в редакцию 27 ноября 1997 г.)

В работе развит новый метод, позволяющий провести точную процедуру усреднения сопротивления цепочки из периодически расположенных случайных короткодействующих потенциалов. Показано, что зависимость среднего сопротивления системы от ее длины, при произвольном характере беспорядка на центрах, есть сумма трех показательных функций. Исследован характер локализации состояний в зависимости от параметров беспорядка системы и энергии одноэлектронных состояний.

## Введение

Для одномерной системы электропроводность  $\sigma$  при нулевой температуре есть обратная величина сопротивления Ландауэра, которая в свою очередь может быть представлена как [1,2]

$$\rho = R/T, \quad (1)$$

где  $R$  и  $T$ —соответственно коэффициенты отражения и прохождения электрона.

Как известно, проблема нахождения средних кинетических характеристик одномерных неупорядоченных систем представляет большой интерес (см., например, [3—14]). Это связано, в частности, с тем, что в ряде случаев одномерные модели допускают точные решения, что позволяет проследить за эволюцией электронных состояний в зависимости от размера образца, при произвольном значении силы взаимодействия. Так, среднее сопротивление Ландауэра  $\langle \rho \rangle$  для одномерного металла с неподвижными рассеивателями, где все электронные состояния локализованы, при нулевой температуре выражается через длину цепочки  $L$ , когда  $L \rightarrow \infty$ , следующей формулой [1—4] ( $\hbar = e^2 = 1$ );

$$\langle \rho \rangle = 1/2 \exp(L/\xi), \quad (2)$$

где угловые скобки  $\langle \dots \rangle$  означают усреднение по всевозможным реализациям случайного поля. Здесь  $\xi$ —радиус локализации одноэлектронных состояний, который зависит от энергии электрона, вида случайного поля и не зависит от длины цепочки.

В работе [15] получено точное решение для среднего сопротивления и найдена зависимость радиуса локализации от параметров бес-

порядка и энергии электрона для модели цепочки из периодически расположенных случайных  $\delta$ -рассеивателей, когда среднее значение потенциала равно нулю. В [16] методом трансфер-матриц был найден общий вид решения для среднего сопротивления модели, рассмотренной в [15], когда среднее значение потенциала отлично от нуля.

В настоящей работе развит новый метод, позволяющий в наиболее общем случае найти точное решение для среднего сопротивления цепочки из случайных короткодействующих потенциалов. Показано, что все одноэлектронные состояния локализованы и найдена зависимость радиуса локализации от параметров системы для всех значений энергии одноэлектронного спектра.

В п.1 настоящей работы дается постановка задачи и приводятся некоторые результаты работ [14, 15]. В п.2 получено уравнение, которому удовлетворяет среднее сопротивление системы. Далее, в п.3 дается точное решение уравнения, полученного в п.2, проводится его анализ и находится радиус локализации.

### 1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу определения среднего Ландауэровского сопротивления цепочки из  $N$  случайных  $\delta$ -потенциалов, расположенных в произвольных точках  $X_1, X_2, \dots, X_N$ :

$$V(X) = \sum_{l=1}^N V_l \delta(X - X_l). \quad (3)$$

Пусть мощности  $\delta$ -потенциалов  $V_1, V_2, \dots, V_N$  суть независимые случайные параметры, принимающие значения в интервале  $[-w/2, w/2]$  с одинаковой функцией распределения  $f(V_l)$ , которая может быть произвольной функцией.

Как было показано в [14, 15], процедура усреднения сопротивления в рассматриваемой модели может быть представлена как

$$\langle \rho_N \rangle = \int_{-w/2}^{w/2} \int_{-w/2}^{w/2} \dots \int_{-w/2}^{w/2} (D_N D_N^* - 1) f(V_1) f(V_2) \dots f(V_N) dV_1 dV_2 \dots dV_N, \quad (4)$$

где  $D_N$  есть следующий ряд:

$$D_N = 1 + \sum_{p=1}^N \sum_{1 \leq l_1 < l_2 < \dots < l_p} \frac{iV_{l_1}}{2k} \frac{iV_{l_2}}{2k} \dots \frac{iV_{l_p}}{2k} \prod_{l=1}^{p-1} (1 - \exp(2ik(X_{l_{l+1}} - X_{l_l}))). \quad (5)$$

Здесь  $k^2 = E$  есть энергия электрона.

Таким образом, задача нахождения среднего сопротивления предполагает интегрирование выражения (4). Как следует из представления  $D_N$  в виде ряда (5), для произвольной реализации случайного поля сопротивление  $\rho_N$  содержит только линейные и квадратичные члены относительно параметров  $V_1, V_2, \dots, V_N$ . Соответственно, среднее сопротивление  $\langle \rho_N \rangle$  при произвольном характере распределения величин  $V_l$

в интервале  $[-\omega/2, \omega/2]$  выражается через среднее  $\langle V \rangle = \bar{v}$  и среднеквадратичное  $\langle V^2 \rangle = a$  значение случайного поля.

В [15] была рассмотрена и точно решена задача определения  $\langle \rho_N \rangle$  (4), когда средний потенциал равен нулю  $\langle V_i \rangle = 0$  и  $\langle V_i^2 \rangle \neq 0$ , что соответствует случаю, когда  $f(V_i)$  есть произвольная четная функция. Непосредственное интегрирование (4) для произвольного  $f(V_i)$ , т. е. когда  $\langle V_i \rangle \neq 0$  и  $\langle V_i^2 \rangle \neq 0$ , сопряжено с определенными математическими трудностями, которые не позволяют определить  $\langle \rho_N \rangle$  непосредственно из (4). Техника нижеизложенного метода заключается в нахождении среднего сопротивления  $\langle \rho_N \rangle$ , не выполняя процедуру усреднения (4) непосредственно.

Приведем некоторые соотношения, которые будут использованы в дальнейшем. Рассмотрим ряд (4) как функцию от дискретной переменной  $N$  и запишем его в виде

$$D = D_{N-1} + \frac{iV_N}{2k} S_N, \quad D_1 = 1 + \frac{iV_1}{2k}. \quad (6)$$

Тогда, как следует из (5) и (6), величина  $S_N$  может быть представлена с помощью рекуррентного уравнения:

$$S = 1 + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{iV_{N-n}}{2k} f_{N-n} S_{N-n}, \quad S_1 = 1, \quad (7)$$

где  $f_{N,N-n} = 1 - \exp i2k(X_N - X_{N-n})$ . Записывая (6) в виде

$$D = 1 + \frac{iV_N}{2k} S_N + \frac{iV_{N-1}}{2k} S_{N-1} + \dots + \frac{iV_1}{2k} S_1 \quad (8)$$

и учитывая (7), между величинами  $S_N, S_{N-1}, D_{N-1}$  можно получить следующее соотношение:

$$D_{N-1} = (1/f_{N,N-1}) S_N + (1 - 1/f_{N,N-1}) S_{N-1}. \quad (9)$$

Рассматривая соотношение (9) в случае, когда переменной  $N$  соответствует число  $N-1$ , и вычитывая его из  $D_{N-1}$  (9), для величины  $S_N$  получим отличное от (7) рекуррентное уравнение:

$$S_N = \left\{ \frac{iV_N}{2k} f_{N,N-1} + \lambda_{N,N-1} + \frac{f_{N,N-1}}{f_{N-1,N-2}} \right\} S_{N-1} - \frac{f_{N,N-1} \cdot \lambda_{N-1,N-2}}{f_{N-1,N-2}} S_{N-2}, \quad (10)$$

где  $\lambda_{N,N-n} = \exp i2k(X_N - X_{N-n})$ .

Интересно отметить, что подстановка  $S_N$  и  $S_{N-1}$  из (6) в (10) сразу приводит к рекуррентному уравнению для  $D_N$ , полученному ранее в работе [9].

## 2. Уравнение для среднего сопротивления $\langle \rho_N \rangle$

Как было отмечено выше, определение среднего сопротивления  $\langle \rho_N \rangle$  из (4) прямой подстановкой  $D_N$  (5) в (4) с последующим интегрированием по параметрам  $V_1, V_2, \dots, V_N$  для произвольной функции

распределения значений мощностей  $\delta$ -потенциалов, не представляется возможным. Ниже мы покажем, что когда  $\delta$ -рассеиватели в цепочке расположены периодически, то возможно такое представление  $\rho_N$ , которое позволяет провести его усреднение для произвольных  $f(V_i)$  в общем случае и в результате получить уравнение для  $\langle \rho_N \rangle$ .

Прежде чем перейти к этой задаче, представим сопротивление  $\rho_N$  цепочки из  $N$   $\delta$ -потенциалов в виде суммы:

$$\rho_N - 1 = P_N + P_{N-1} + \dots + P_1, \quad (11)$$

где

$$P_N = |D_N|^2 - |D_{N-1}|^2. \quad (12)$$

Последнее, как следует из (6), может быть также представлено в виде

$$P_N = \frac{V_N^2}{4k^2} S_N S_N^* - \frac{iV_N}{2k} \{S_N D_{N-1}^* - S_N^* D_{N-1}\}. \quad (13)$$

Из (13) видно, что относительно параметра  $V_N$  величина  $P_N$  содержит только линейные и квадратичные члены, т. к.  $S_N$  и  $D_N$  содержат только параметры  $V_1, V_2, \dots, V_{N-1}$ . Данное свойство величины  $P_N$  имеет ключевое значение в процессе усреднения  $\rho_N$  и связано с тем, что в рассматриваемой модели беспорядка случайные параметры  $V_1, V_2, \dots, V_N$  нескоррелированы.

Рассмотрим модель, когда  $\delta$ -рассеиватели в цепочке расположены периодически, т. е.  $|X_n - X_m| = a|n - m|$ , где  $a$  — период цепочки. Использование (9), (10) и (13) позволяет выразить величины  $P_N, P_{N-1}$  через  $S_N, S_{N-1}, S_{N-2}, S_{N-3}$  в следующем виде:

$$P_N = L_N |S_N|^2 - \frac{V_N}{2k} K_{N-1} |S_{N-1}|^2 + \frac{V_N}{2k} K_{N-2} |S_{N-2}|^2 - \frac{V_N}{2k} C^* S_{N-2}^* S_{N-3} + \frac{V_N}{2k} C S_{N-2} S_{N-3}, \quad (14)$$

$$P_{N-1} = L_{N-1} |S_{N-1}|^2 - \frac{V_{N-1}}{2k} K_{N-2} |S_{N-2}|^2 + \frac{V_{N-1}}{2k} C^* S_{N-2}^* S_{N-3} + \frac{V_{N-1}}{2k} C S_{N-2} S_{N-3}, \quad (15)$$

$$L_N = \frac{V_N^2}{4k^2} + \frac{V_N}{2k} (C + C^*) + |C|^2, \quad K_N = C R_{N-1} + G^* R^*, \quad (16)$$

$$C = \frac{1}{i(1-B)}, \quad R_N = \left\{ 1 + B + \frac{iV_N}{2k} (1-B) \right\}, \quad B = \exp(i2ka). \quad (17)$$

Как видно из представлений  $P_N, P_{N-1}$  в виде (14), (15), искомые функции  $|S_N|^2, S_N^* S_{N-1}, S_N, S_{N-1}^*$  и соответствующие им коэффициенты  $L_N, K_N$  при любом  $N$  содержат различные по индексу параметры  $V_N$ . Причем искомые функции зависят от меньших по индексу параметров  $V$ , чем соответствующие им коэффициенты.

Как следует из вышесказанного, при усреднении величин  $P_N$ ,  $P_{N-1}$  для модели, когда параметры  $V_N$  суть случайные независимые величины, их представление в виде (14), (15) допускает факторизацию, т. е.

$$\langle L_N \cdot |S_N|^2 \rangle = \langle L_N \rangle \cdot \langle |S_N|^2 \rangle \text{ и т. д.}$$

Таким образом, в выражениях  $\langle P_N \rangle$  и  $\langle P_{N-1} \rangle$  среднее от произведений искоемых функций и соответствующих им коэффициентов есть произведение средних искоемых функций и коэффициентов.

Рассмотрим среднее от величины  $P_N + P_{N-1}$ :

$$\langle F_N \rangle = \langle P_N + P_{N-1} \rangle = \langle \rho_N \rangle - \langle \rho_{N-2} \rangle. \quad (18)$$

Тогда, используя (14), (15), для него получим следующее выражение:

$$\langle F_N \rangle = \langle L_N \rangle \langle |S_N|^2 \rangle + \left( \langle L_N \rangle - \left\langle \frac{V_N}{2k} K_N \right\rangle \right) \langle |S_{N-1}|^2 \rangle, \quad (19)$$

$$\text{где } \langle L_N \rangle = \langle L_{N-1} \rangle = \frac{\alpha}{4k^2} + \frac{\beta}{2k} (C + C^*) + |C|^2, \quad (19.a)$$

$$\langle V_N K_N \rangle = C \left\{ \frac{\beta}{2k} (1 + B) + i \frac{\alpha}{4k^2} (1 + B) \right\} + \text{к.с.} \quad (19.б)$$

Согласно (18) и (19), для нахождения разностного уравнения для  $\langle \rho_N \rangle$  необходимо получить разностное уравнение для  $\langle |S_N|^2 \rangle$ . Используя (10), искоемые функции  $|S_N|^2$  и  $|S_{N-1}|^2$  можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} |S_N|^2 = & |A_{N-1}|^2 |S_{N-1}|^2 - \{A_{N-1}^* A_{N-2} + A_{N-1} A_{N-2}^* - 1\} |S_{N-2}|^2 + \\ & + A_{N-1} S_{N-2}^* S_{N-3} + A_{N-1}^* S_{N-2} S_{N-3}^*, \end{aligned} \quad (20)$$

$$|S_{N-1}|^2 = |A_{N-2}|^2 |S_{N-2}|^2 - |S_{N-3}|^2 + A_{N-2} S_{N-3}^* S_{N-4} + A_{N-2}^* S_{N-3} S_{N-4}^*, \quad (21)$$

$$\text{где } A_N = 1 + \exp(2ika) + \frac{iV}{2k} (1 - \exp(2ika)).$$

Усредняя выражения (20) и (21) и учитывая, что  $\langle A_N \rangle$  не зависит от  $N$ , получим для  $\langle |S_N|^2 \rangle$  следующее рекуррентное уравнение:

$$\langle |S_N|^2 \rangle = (l+m) \langle |S_{N-1}|^2 \rangle - (l-m) \langle |S_{N-2}|^2 \rangle + \langle |S_{N-3}|^2 \rangle, \quad (22)$$

где

$$l = 4 \left( \cos(ka) + \frac{\beta}{2k} \sin(ka) \right) - 1, \quad m = 2 \left( \frac{\alpha}{4k^2} - \frac{\beta^2}{4k^2} \right) (1 - \cos(2ka)). \quad (22.a)$$

Легко заметить, что величины  $\langle F_N \rangle$  удовлетворяют такому же рекуррентному уравнению, что и  $\langle |S_N|^2 \rangle$ , т. е.

$$\langle F_N \rangle = (l+m) \langle F_{N-1} \rangle - (l-m) \langle F_{N-2} \rangle + \langle F_{N-3} \rangle. \quad (23)$$

Действительно, если подставить  $\langle F_N \rangle$  в виде (19) в (23) и учесть (22), то соотношение (23) превращается в тождество.

Учитывая, что  $\langle F_N \rangle = \langle \rho_N \rangle - \langle \rho_{N-2} \rangle$ , для величины  $\langle \rho_N \rangle$  получим искомого конечно-разностное уравнение от дискретной переменной  $N$ :

$$\langle \rho_N \rangle = (l+m)\langle \rho_{N-1} \rangle - (l-m)\langle \rho_{N-2} \rangle + \langle \rho_{N-3} \rangle + m. \quad (24)$$

Расписав уравнение (24) для  $N$  и  $N-2$  и рассматривая их разность, мы получим уравнение (23).

Выбор неоднородной части уравнения (24), равной  $m$ , связан с требованием его выполнения для  $N=3$ . Как видно из (22), (23), величины  $\langle F_N \rangle$  и  $\langle |S_N|^2 \rangle$  удовлетворяют тому же уравнению, что и  $\langle \rho_N \rangle$  с неоднородной частью, равной нулю. Таким образом, задача определения среднего сопротивления  $\langle \rho_N \rangle$  при произвольном характере распределения мощностей  $\delta$ -потенциалов в общем случае сводится к задаче решения уравнения (24) с граничными условиями

$$\langle \rho_2 \rangle = 2 \frac{\beta^2}{4k^2} \cos(2ka) + 4 \frac{\alpha\beta}{8k^3} \sin(2ka) + 2 \frac{\alpha}{4k^2} + 2 \frac{\alpha^2}{16k^4} (1 - \cos(2ka)), \quad (25)$$

$$\langle \rho_1 \rangle = \frac{\alpha}{4k^2}, \quad \langle \rho_0 \rangle = 0.$$

Выражения для  $\langle \rho_0 \rangle$ ,  $\langle \rho_1 \rangle$ ,  $\langle \rho_2 \rangle$  легко получить непосредственно из (4) и (5).

В конце заметим, что решение рекуррентного уравнения (24) как «дифференциального уравнения» для дискретной переменной с «граничными условиями» (25) равносильно решению «интегрального» уравнения

$$\langle \rho_N \rangle = \left( \frac{\alpha - \beta}{4k^2} \right) N + \frac{\beta^2}{4k^2} \frac{\sin^2(Nka)}{\sin^2(ka)} + \sum_{n=1}^{N-1} c_n \langle \rho_n \rangle, \quad (26)$$

где

$$c_n = 2 \left( \frac{\alpha - \beta}{4k^2} \right) (1 - \cos(2kan)) + 2 \left( 2 \frac{\beta}{2k} + \frac{\beta^2}{4k^2} \operatorname{tg}(ka) \right) \sin(2kan).$$

Отметим, что при  $\beta=0$  (средний потенциал равен нулю) уравнение (26) переходит в уравнение, которое было получено и решено в работе [15].

### 3. Среднее сопротивление системы и радиус локализации

Следуя работам [15, 16], будем искать зависимость среднего сопротивления цепочки от ее длины в следующем виде:

$$\langle \rho_N \rangle = \sum_{j=1}^p A_j x_j + A_0, \quad (27)$$

где  $A_j$ ,  $x_j$ ,  $A_0$  не зависят от  $N$ . Подставляя (27) в (24) или же (26), получаем  $A_0 = -1/2$  и характеристическое уравнение для определения величин  $x_j$ :

$$x_j^3 - x_j^2(l+m) + x_j(l-m) - 1 = 0, \quad (28)$$

$$\text{где } l = 4\cos^2\varphi - 1, \quad m = \left(\frac{\alpha - \beta^2}{4k^2}\right)(1 - \cos(2ka)). \quad (28.a)$$

Подставляя решение (27) в «граничные условия» (25), с учетом характеристического уравнения (28) получим следующие уравнения для определения  $A_j$ :

$$\sum_{j=1}^3 A_j x_j = \frac{1}{2} + \alpha, \quad (29)$$

$$\sum_{j=1}^3 \frac{A_j}{1+x_j} = \frac{1}{4} + \frac{(\beta^2 - \alpha)\cos^2(ka)}{\cos^2\varphi}, \quad (30)$$

$$\sum_{j=1}^3 A_j = \frac{1}{3}. \quad (31)$$

Так как уравнение (26) содержит в себе граничные условия (25), то уравнения (29)-(31) можно также получить прямой подстановкой решения (27) в (26). Решение линейной системы уравнений (29)-(31) приводит к следующим выражениям для коэффициентов  $A_1, A_2, A_3$ :

$$A_1 = \frac{1}{2} \frac{4b(1+l) - (1+x_1)(l+m-x_1-2a+1)}{(x_2-x_1)(x_3-x_1)}, \quad (32)$$

где

$$a = \alpha + \frac{1}{2}, \quad b = \frac{1}{4} + \frac{(\beta^2 - \alpha)\cos^2(ka)}{16k^2\cos^2\varphi}.$$

Коэффициенты  $A_2, A_3$  получаются из  $A_1$  с помощью циклической перестановки букв  $x_1, x_2, x_3$ .

Таким образом, зависимость среднего сопротивления цепочки от ее длины в общем случае выражается суммой трех показательных функций от корней характеристического уравнения (28)  $x_1, x_2, x_3$  с коэффициентами  $A_1, A_2, A_3$ .

Корни кубического уравнения (28) выражаются через радикалы:

$$x_1 = A + B + \frac{l+m}{3}, \quad x_2, x_3 = -\frac{A+B}{2} \pm i \frac{A-B}{2} \sqrt{3} + \frac{l+m}{3}, \quad (33)$$

$$\text{где } A = \sqrt{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}}, \quad B = \sqrt{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}}, \quad (34)$$

$$Q = \frac{2l}{3} \frac{l^2 + 3m^2}{9} - \frac{1}{12} \left(\frac{l^2 - m^2}{3}\right)^2 - \frac{l^2 - m^2}{6} + \frac{1}{4}, \quad (35)$$

$$q = -2 \left(\frac{l+m}{3}\right)^3 + \frac{l^2 - m^2}{6} - \frac{1}{2}.$$

Отметим, что при  $Q > 0$  уравнение (28) имеет один действительный корень и два комплексно-сопряженных корня, и при  $Q \leq 0$  все три корня являются действительными.

Интересно рассмотреть некоторые частные случаи рассматриваемой модели. Сопротивление  $\rho_N$  для известной модели Кронига-Пенни (все  $\delta$ -потенциалы имеют одинаковую мощность) можно получить из решения (27) подстановкой  $z = \beta^2$ . Действительно, из (33) в этом случае получаем

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \exp(i2\varphi), \quad x_3 = \exp(-i2\varphi). \quad (36)$$

Тогда подставляя (36) в (32), имеем:

$$A_1 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\beta^2}{4k^2 \sin^2 \varphi} - 1 \right\}, \quad A_2 = A_3 = \frac{1}{16k^2} \cdot \frac{\beta^2}{\sin^2 \varphi}. \quad (37)$$

Подстановка (36) и (37) в (27) сразу приводит к известному результату [9]:

$$\rho_N = \frac{\beta^2}{4k^2} \cdot \frac{\sin^2(N\varphi)}{\sin^2 \varphi}, \quad (38)$$

где

$$\cos \varphi = (\cos ka) + \frac{V}{2k} \sin(ka).$$

Как видно из (38), при  $|\cos \varphi| \leq 1$ , что соответствует спектру разрешенных значений энергии электрона, зависимость  $\rho_N$  от  $N$  имеет осцилляционный характер. Когда  $|\cos \varphi| > 1$ , что предполагает подстановку  $\varphi = i\gamma$  в (38), сопротивление цепочки при увеличении ее длины экспоненциально растет. Рассмотрим другой частный случай, когда энергия электрона соответствует краю энергетической зоны ( $ka = \pi$ ,  $k^2 = E$  — энергия электрона) и параметры беспорядка  $\alpha$  и  $\beta$  могут принимать произвольные значения. В этом случае среднее сопротивление  $\langle \rho_N \rangle$  имеет следующий вид:

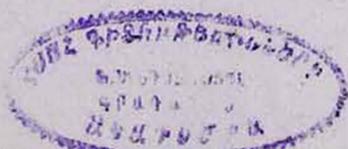
$$\langle \rho_N \rangle = \left( \frac{\alpha - \beta^2}{4k^2} \right) N + \frac{\beta^2}{4k^2} N^2. \quad (39)$$

Результат (39) легко получить из рекуррентного уравнения (26), замечая, что при  $ka = \pi$  для произвольного  $n$  величины  $c_n = 0$ . Как видно из (39), зависимость среднего сопротивления системы от ее длины состоит из линейного и квадратичного относительно  $N$  слагаемых. Степенная зависимость  $\langle \rho_N \rangle$  от  $N$  приводит к тому, что состояние является делокализованным. Это хорошо известная особенность рассматриваемой модели, связанная с выбором потенциалов взаимодействия в виде  $\delta$ -функций [5].

Прежде чем рассматривать асимптотическое поведение  $\langle \rho_N \rangle$  при  $N \rightarrow \infty$ , выясним некоторые свойства корней характеристического уравнения (28). Для этого запишем (28) в следующем виде:

$$l = \frac{x^2 + x + 1}{x} m - \frac{x + 1}{x - 1}. \quad (40)$$

Будем рассматривать  $l$  и  $m$  как линейно независимые переменные, а корень  $x$  характеристического уравнения (28) как некий независимый



параметр уравнения (40). Как видно из определений  $l$  и  $m$  (28.а), для произвольно заданных  $ka$ ,  $\beta$  и  $\alpha$  ( $\alpha \geq 0$ ,  $\alpha - \beta^2 \geq 0$ ) они могут принимать численные значения только в интервалах

$$l \in [-1; \infty[ \text{ и } m \in [0; \infty[. \quad (41)$$

Можно показать, что только для определенных  $x$  уравнение (40), которое на плоскости  $(l; m)$  выглядит как прямая линия, пересекает область определения переменных  $l$  и  $m$  (41). Ясно, что действительные корни характеристического уравнения имеют такие численные значения, для которых прямая (40) проходит через область (41). Это имеет место, когда  $x$  принимает значение в интервале

$$x \in [-1; \infty[. \quad (42)$$

Из сказанного вытекает, что характеристическое уравнение (28) всегда имеет действительный корень, который больше или равен единице. Остальные корни при  $Q \leq 0$  меньше единицы и при  $Q > 0$  модуль комплексных корней меньше единицы. Заметим, что возможно и наличие двух корней больших единицы ( $Q \leq 0$ ). Следовательно, радиус локализации, согласно (2) определяется формулой

$$\xi = a/x_1, \quad (43)$$

где  $x_1$  — наибольший действительный корень ( $x_1 > 1$ ) уравнения (28).

Как видно из (43), когда  $x_1 = 1$ , радиус локализации становится бесконечным, т.е. имеет место делокализация состояний. Действительно, как видно из (36), случай  $x_1 = \theta^2 = 1$  соответствует модели Кронига-Пенни  $\langle V^2 \rangle = \langle V \rangle^2$ , когда энергия электрона лежит в пределах разрешенной зоны ( $|\cos \phi| \leq 1$ ).

Когда дисперсия потенциала отлична от нуля, то  $x_1$  больше единицы. Тогда все электронные состояния являются локализованными.

Найдем радиус локализации для физически интересного случая, когда энергия частицы лежит в пределах разрешенной зоны модели Кронига-Пенни, а дисперсия потенциала  $\sigma$  намного меньше среднего значения потенциала, т.е.  $\langle V^2 \rangle - \langle V \rangle^2 \ll \langle V \rangle^2$ . В этом случае  $x_1$  близко к единице и его можно искать в виде

$$x_1 = 1 + \Delta x; \quad 0 < \Delta x \ll 1. \quad (44)$$

Подставляя (44) в (28) и оставляя только члены, линейные по  $\sigma^2$ , для  $\Delta x$  получим

$$\Delta x = \frac{2m}{3-l}. \quad (45)$$

Подставляя (44) в (43), с учетом (45) для радиуса локализации окончательно получим

$$\xi = \frac{2ak^2}{\sigma^2} \left( \frac{\sin \varphi}{\sin(ka)} \right)^2. \quad (46)$$

Формула (46) определяет зависимость радиуса локализации от дис-

персии потенциала и энергии электрона при малых дисперсиях. Равенство между корнями уравнения, т.е.  $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ , выполняется в случае, когда  $Q=0$ , что, как было отмечено выше, соответствует состояниям  $ka = \pi m$  ( $m=0,1,\dots$ ). Как видно из (43), в данном случае состояния являются делокализованными.

В заключение отметим, что в рамках рассматриваемой модели все состояния одноэлектронного спектра, кроме состояний  $ka = \pi m$  ( $m=0,1,\dots$ ), локализованы. Найдено аналитическое выражение для зависимости радиуса локализации от параметров беспорядка системы и энергии электрона. Предложенный в работе метод может быть применен для нахождения средних значений более высоких моментов случайной величины  $\rho_N$ , а также при решении задачи в случае горизонтального беспорядка.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. R. Landauer. *Phil. Mag.*, 21, 863 (1970).
2. F. W. Anderson, D. L. Thouless, E. Abrahams, D. S. Fisher. *Phys. Rev.*, B22, 3519 (1980).
3. V. L. Melnikov. *Sov. Phys. Solid State*, 23, 444 (1981).
4. V. N. Prigodin. *Sov. Phys. JETP*, 52, 1185 (1980).
5. И. М. Лифшиц, С. А. Гредескул, Л. А. Пастур. Введение в теорию неупорядоченных систем. М., Наука, 1982.
6. G. M. Soukalis, I. V. Jose, E. N. Economou, Ping Sheng. *Phys. Lett.*, 50, 786 (1983).
7. В. И. Перель, Д. И. Поляков. *ЖЕТФ*, 86, 352 (1984).
8. N. Kumar. *Phys. Rev.*, B31, 5513 (1985).
9. V. M. Gasparian, B. L. Altshuler, A. G. Aronov, Z. H. Kasamian. *Phys. Lett.*, A132, 201 (1988).
10. А. П. Дмитриев. *ЖЕТФ*, 95, 234 (1989).
11. O. N. Dorokhov. *Sov. Phys. JETP*, 74, 518 (1992).
12. N. Zekri, M. Schreiber, R. Ouasti, R. Rouamrane, A. Brezini. *Z. Phys. B*, 99, 381 (1996).
13. Б. Н. Шалаев. *ФТТ*, 32, 3586 (1990).
14. V. M. Gasparian, *Ash. Zh. Khachatrian. Solid State Commun.*, 12, 1061 (1993).
15. Д. М. Седракиан, Д. А. Бадалян, В. М. Гаспарян, А. Ж. Хачатрян. *ЖЭТФ*, 111, 575 (1997).
16. P. Erdos, C. Herdon. *Solid State Commun.*, 98, 495 (1996).
17. Ю. А. Бычков. Письма в *ЖЭТФ*, 17, 226 (1973).
18. B. Kramer, *Localization and ...*, Preprint PTB (1988).

#### LOCALIZATION OF ELECTRON IN A ONE-DIMENSIONAL CHAIN OF PERIODICALLY ARRANGED RANDOM $\delta$ -SCATTERERS

D. M. SEDRAKIAN, D. H. BADALYAN, ASH. ZH. KHACHATRIAN

A new method is developed for the exact procedure of averaging the resistance of the chain consisting of periodically spaced random delta-function potentials. It is shown that the dependence of the average resistance on the length of the chain, for an arbitrary disorder on the centers, is a sum of three exponential functions. The dependence of the localization radius on the energy of the incident electron and on disorder parameters of the chain is found.