

УДК 535.14

КРИТИЧЕСКОЕ ЯВЛЕНИЕ И КВАНТОВЫЕ ФЛУКТУАЦИИ В ГЕНЕРАЦИИ ТРЕТЬЕЙ ГАРМОНИКИ

С. Т. ГЕВОРКЯН

Институт физических исследований НАН Армении

(Поступила в редакцию 18 июня 1997 г.)

Для процесса внутррезонаторной генерации третьей гармоники в положительном P -представлении численно исследованы совместные флуктуации числа фотонов и фаз. Показано, что правее точки бифуркации оптической системы третью гармонику наиболее вероятно регистрировать в двух состояниях, с одинаковой вероятностью в каждой из них (суперпозиционное состояние). Время осцилляции между этими состояниями порядка времени жизни фотона в объеме резонатора. Показано, что функция совместного распределения фаз фундаментальной моды и третьей гармоники имеет провал, размеры которого увеличиваются при удалении системы от точки бифуркации вправо.

1. Введение

Внутррезонаторная генерация третьей гармоники (ГТГ) в $\chi^{(3)}$ кристаллах или в атомарных средах является интересным объектом исследования квантовых шумов в нелинейных оптических процессах. Впервые квантовая теория ГТГ в положительном P -представлении [1] была развита в работе [2], где исследован спектр амплитудного сжатия фундаментальной моды и третьей гармоники. Было показано, что эффект сжатия для генерации третьей гармоники составляет 90%, что превышает сжатие для процесса генерации второй гармоники (около 50% [3,4]).

Квантовые флуктуации в нелинейной $\chi^{(3)}$ среде для процесса третьей субгармоники впервые теоретически исследованы в работе [5]. Здесь методом квантовых траекторий [6] вычислена функция Вигнера для третьей субгармоники. Показано, что эта функция представляет некогерентную смесь четырех состояний. Вычислено время диффузии между этими состояниями.

Настоящая работа является органическим продолжением [2]. Здесь исследуются флуктуации третьей гармоники и фундаментальной моды правее точки бифуркации Хопфа оптической системы. С этой целью с помощью численного решения уравнений Ланжевена для оптической системы вычислены функции совместного распределения числа фотонов и фаз взаимодействующих мод.

2. Основные уравнения

Мы рассматриваем модель генерации третьей гармоники внутри двухмодового резонатора. Нелинейная среда помещена в резонатор, который настроен на частотах фундаментальной моды ω_1 и третьей гармоники $\omega_2 = 3\omega_1$. Полагаем, что фундаментальная мода резонансно возбуждается внешним классическим полем. Учитывается затухание мод через одно из зеркал резонатора. Гамильтониан, описывающий такое взаимодействие, может быть представлен в следующем виде:

$$\begin{aligned} H &= \hbar\omega_1 a_1^+ a_1 + 3\hbar\omega_1 a_2^+ a_2 + H_{\text{int}} + H_{\text{loss}}, \\ H_{\text{int}} &= i\hbar\chi(a_1^3 a_2^+ - a_1^+ a_2^3) + i\hbar(Ee^{-i\omega_1 t} a_1^+ - E^* e^{i\omega_1 t} a_1), \\ H_{\text{loss}} &= a_1 \Gamma_1^+ + a_1^+ \Gamma_1 + a_2 \Gamma_2^+ + a_2^+ \Gamma_2. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь a_i^+, a_i ($i=1,2$) — операторы рождения и уничтожения фотонов фундаментальной моды и третьей гармоники, χ — коэффициент связи между модами, пропорциональный нелинейной восприимчивости среды $\chi^{(3)}$, E — классическая амплитуда поля возмущения с частотой ω_1 , Γ_i, Γ_i^+ — операторы термостатов соответствующих мод, которые определяют коэффициенты затухания мод резонатора γ_1, γ_2 на частотах ω_1, ω_2 соответственно.

Из гамильтониана (1), после адиабатического исключения операторов резервуаров в положительном P -представлении, получаем следующие уравнения Ланжевена [2]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} &= E - \gamma_1 \alpha_1 - 3\chi \beta_1^2 \alpha_2 + \sqrt{-6\chi \beta_1 \alpha_2} \xi_1(t) + \sqrt[3]{-6\chi \alpha_2} \eta_1(t), \\ \frac{\partial \beta_1}{\partial t} &= E^* - \gamma_1 \beta_1 - 3\chi \alpha_1^2 \beta_2 + \sqrt{-6\chi \alpha_1 \beta_2} \xi_2(t) + \sqrt[3]{-6\chi \beta_2} \eta_2(t), \\ \frac{\partial \alpha_2}{\partial t} &= -\gamma_2 \alpha_2 + \chi \alpha_1^3, \\ \frac{\partial \beta_2}{\partial t} &= -\gamma \beta_2 + \chi \beta_1^3. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь β_i, α_i — независимые стохастические переменные, соответствующие медленно меняющимся во времени операторам амплитуд a_i^+, a_i . Отличными от нуля корреляционными функциями для шумовых членов $\xi_1(t), \xi_2(t)$ и $\eta_1(t), \eta_2(t)$ являются

$$\begin{aligned} \langle \xi_1(t) \xi_1(t') \rangle &= \langle \xi_2(t) \xi_2(t') \rangle = \delta(t-t'), \\ \langle \eta_1(t) \eta_1(t') \eta_1(t'') \rangle &= \langle \eta_2(t) \eta_2(t') \eta_2(t'') \rangle = \delta(t-t') \delta(t'-t''). \end{aligned} \quad (3)$$

Система уравнений (2) для больших времен ($\gamma_1 t \gg 1, \gamma_2 t \gg 1$) имеет устойчивые стационарные решения для числа фотонов и фаз

$$n_j = \alpha_j \beta_j, \quad \phi_j = -\frac{1}{2i} \ln \left(\frac{\alpha_j}{\beta_j} \right) \quad (j=1,2) \quad (4)$$

лишь в случае слабых полей возмущения $|E| < |E_{cr}|$. Здесь E_{cr} (точка бифуркации Хопфа) определяется следующей формулой [2]:

$$\varepsilon_{cr} = \frac{1}{\sqrt[4]{6k}} \left\{ (1+r)^{1/4} + \frac{1}{2} (1+r)^{5/4} \right\}, \quad (5)$$

где

$$r = \gamma_2 / \gamma_1, \quad k = \chi^2 / \gamma_1 \gamma_2, \quad \varepsilon = |E| / \gamma_1. \quad (6)$$

В случае возмущения $|E| > |E_{cr}|$ малые флуктуации фаз фундаментальной моды и третьей гармоники в течение времени не затухают. Система теряет устойчивость вблизи стационарных решений уравнений (2) без шумовых членов. В этом случае классические решения для числа фотонов переходят в режим автоколебания. Вследствие вышесказанного в области $|E| > |E_{cr}|$ (область неустойчивости) неправильными являются квантовые решения для числа фотонов, которые получают с помощью разложения системы уравнений (2) по малым шумам [7].

Наше вычисление основано на моделировании шумовых источников $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$, $\eta_1(t)$, $\eta_2(t)$ и на этой основе получении ансамбля численных реализаций системы уравнений (2).

3. Совместные флуктуации числа фотонов и фаз

Обратимся к вычислению плотности совместного распределения числа фотонов и фазы для третьей гармоники. Эту величину мы вычисляем с помощью следующей формулы [8]:

$$P(n_2, \phi_2, t) = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta n_2 \rightarrow 0, \Delta \phi_2 \rightarrow 0}} \left(\frac{S_N(t)}{N} \right). \quad (7)$$

Здесь $P(n_2, \phi_2, t)$ — функция распределения в момент времени t , $S_N(t)$ — число тех реализаций, которые в момент времени находятся в элементе фазового пространства $\Delta n_2 \Delta \phi_2$ (с точкой n_2, ϕ_2 внутри), N — число реализаций в ансамбле.

На рис.1 приведена плотность вероятности совместного распределения $P(\text{Re } n, \text{Re } \phi, \gamma t = 9,5)$ числа фотонов и фазы для третьей гармоники в момент времени $\gamma t = 9,5$ для значений параметров, при которых критическое возмущение равно $E_{cr} / \gamma = 270$. Функция была вычислена для случая гауссовских распределений начальных стохастических амплитуд:

$$\alpha_j(0) = \sqrt{-\ln x_j} \cos(2\pi y_j) + i \sqrt{-\ln x_j} \sin(2\pi y_j),$$

$$\beta_j(0) = \sqrt{-\ln x_j} \cos(2\pi y_j) - i \sqrt{-\ln x_j} \sin(2\pi y_j), \quad (j=1,2) \quad (8)$$

где x_j, y_j — независимые случайные числа, равномерно распределенные в интервале $(0 \dots 1)$. В частности, для этих амплитуд имеем

$$\langle \alpha_i(0) \rangle = \langle \beta_i(0) \rangle = 0, \quad \langle \beta_i(0) \alpha_j(0) \rangle = \delta_{ij}. \quad (9)$$

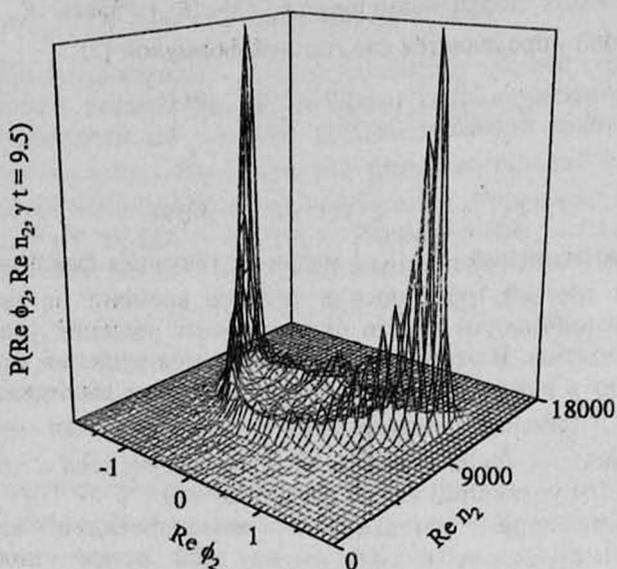


Рис.1. Функция совместного распределения числа фотонов и фазы для третьей гармоники в момент времени $\gamma t = 9.5$. Функция вычислена с помощью 50 000 независимых траекторий уравнений (2) в случае начальных гауссовских состояний обеих мод и для значений параметров $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$, $E/\gamma = 380$, $k = 10^{-9}$.

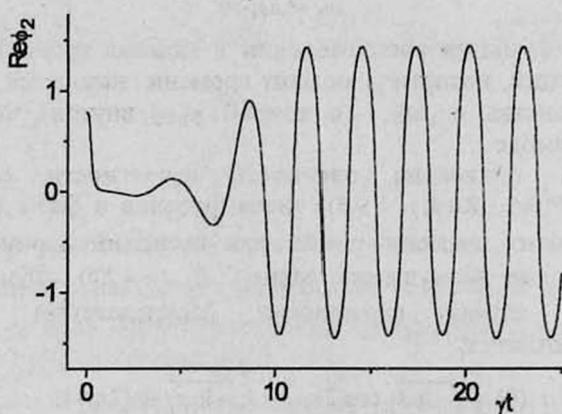


Рис.2. Реализация фазы третьей гармоники для случая $\alpha_k(0) = 1+i$, $\beta_k(0) = 1-i$ ($k = 1, 2$) и для значений параметров рис.1.

Функция распределения симметрична относительно нулевой фазы (фазы классического поля возмущения) и имеет два пика. В этом случае наиболее вероятно регистрировать систему в двух состояниях (суперпозиционное состояние [9]) с одинаковой вероятностью в каждой

из них. В этих состояниях третья гармоника имеет противоположные знаки фаз и одинаковые значения числа фотонов. Происходит осцилляция поля третьей гармоники между этими состояниями (см. рис.2). Время перехода из одного состояния в другое порядка времени жизни фотона этой моды в объеме резонатора.

4. Согласование фаз между модами

В этом разделе исследуются совместные флуктуации фаз фундаментальной моды и третьей гармоники правее точки бифуркации оптической системы. С этой целью вычисляется функция совместного распределения фаз этих мод $P(\phi_1, \phi_2, t)$. Метод вычисления функции аналогичен приведенному в разделе 3. Эта функция характеризует фазовое согласие между взаимодействующими модами. Левее от критической точки, где система имеет устойчивые стационарные полуклассические решения для числа фотонов $n_k^{(s)}$ ($k=1,2$) и фаз $\phi_1^{(s)} = \phi_2^{(s)} = 0$, фазовые флуктуации значительно меньше единицы (область стабильной генерации третьей гармоники). В этом случае наиболее вероятные значения пары фаз совпадают с полуклассическими значениями этих величин.

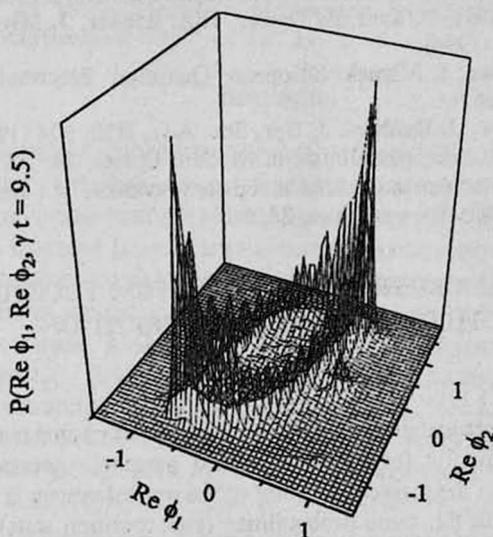


Рис.3. Плотность совместного распределения фаз фундаментальной моды и третьей гармоники в момент времени $\gamma t = 9.5$. Функция вычислена с помощью 50 000 траекторий уравнений (2) в случае начальных гауссовских состояний обеих мод и для значений параметров рис.1.

Плотность совместного распределения фаз взаимодействующих мод $P(\text{Re } \phi_1, \text{Re } \phi_2, \gamma t = 9.5)$ правее критической точки приведена на рис.3. В этой области фазовые флуктуации становятся порядка единицы.

События в некоторой области, окружающей точку ($\phi_1 = 0, \phi_2 = 0$) (эта точка определяет фазовый синхронизм в классических решениях), имеют нулевую вероятность реализации. Функция имеет два пика. Наиболее вероятно зарегистрировать систему в двух состояниях с одинаковой вероятностью в каждой из них. В каждом из этих состояний третья гармоника и фундаментальная мода принимают одинаковые знаки фаз относительно фазы поля возмущения. При приближении системы к точке бифуркации справа ($E \rightarrow E_{cr}$) вышеуказанная область уменьшается и в критической точке вместо провала вокруг значений ($\phi_1 = 0, \phi_2 = 0$) получаем острый пик в этой точке.

Таким образом, в работе показана возможность получения квантовых суперпозиционных состояний при генерации третьей гармоники.

Автор выражает благодарность проф. Р. Грахаму за полезные обсуждения. Работа поддержана грантом 96-775 Армянского фонда фундаментальных исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. К.В. Гарднер. Стохастические методы в естественных науках. М., Мир, 1986.
2. S.T. Gevorkyan, G.Yu. Kruchkyan, K.V. Kheruntsyan. Opt. Comm., 134, 440 (1997).
3. P. Kurz, R. Rachotta, K. Fiedler, A. Sizmann, J. Mlynek. Europhys. Lett., 24, 449 (1993).
4. R. Rashotta, M. Collett, P. Kurz, K. Fiedler, H.A. Bachor, J. Mlynek. Phys. Rev. Lett., 72, 3807 (1994).
5. T. Felbinger, S. Sciller, J. Mlynek. European Quantum Electronics Conference. Hamburg, p.102, 1996.
6. K. Molmer, Y. Gustin, J. Dalibard. J. Opt. Soc. Am., B10, 524 (1992).
7. S.T. Gevorkyan, W.A. Maloyan. Journ. of Modern Optics, 44, 1443 (1997).
8. Ф.М. Куни. Статистическая физика и термодинамика. М., Наука, 1981.
9. E. Schroedinger. Naturwissenschaften, 23, 807 (1935).

CRITICAL PHENOMENON AND QUANTUM FLUCTUATIONS IN THIRD HARMONIC GENERATION

S. T. GEVORKYAN

In the positive P-representation the joint fluctuations of photon numbers and phases were investigated numerically for intracavity third harmonic generation. The third harmonic at the right from the bifurcation point of the optical system is most probably to register at two states with the same probabilities (superposition state). The oscillation time of the system between these states has the same order of magnitude with the photon lifetime in cavity. In the joint distribution function of fundamental mode phases and third harmonic there is a dip, which size increases with removing of the system to the right from the bifurcation point.