

ПОЛЕ ТЕМПЕРАТУР В АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ ПРИ  
УСТАНОВИВШЕМСЯ ТЕМПЕРАТУРНОМ ГРАДИЕНТЕ

А. М. ЕГИАЗАРЯН, Х. В. КОТАНДЖЯН, Ю. Н. ГАЗАРЯН

Институт прикладных проблем физики НАН Армении

(Поступила в редакцию 4 октября 1996г.)

Аналитически решена задача определения температурного поля в кристалле кварца при установившемся температурном градиенте. Определены изотермические поверхности в кристалле кварца и функции смещения атомов из положения равновесия.

Определение температурного поля в анизотропных средах является самостоятельной задачей, важной для объяснения результатов многих теоретических и экспериментальных исследований. Важность ее особенно проявляется в связи с теплообменом поверхностей кристалла со средой. Нахождение распределения температуры в такой среде в общем случае сводится к решению задачи для температурного поля изотропной среды при соответствующем выборе начала отсчета и направления координатных осей. В случае установившегося температурного градиента задача сводится к решению уравнений в частных производных второго порядка с соответствующими граничными условиями. Для тела, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда, решение этого уравнения можно записать аналитически.

Целью настоящей работы является определение изотермических поверхностей в кристалле кварца и определение функции смещения атомов из положения равновесия.

Стороны прямоугольного параллелепипеда, в виде которого вырезан кристалл кварца, обозначим через  $2A$ ,  $2B$ ,  $C$ . Систему координат выберем так, чтобы декартовы координаты атомов удовлетворяли условиям

$$-A < x < A, \quad -B < y < B, \quad 0 < z < C.$$

Пусть грань  $z=0$  поддерживается при температуре  $t_1$ , а грань  $z=C$  при температуре  $t_2$ . Предположим, что на всех остальных гранях происходит свободный теплообмен со средой температуры  $t_2$ . Если обозначить коэффициенты теплопроводности кристалла вдоль осей  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  через  $\chi_1$ ,  $\chi_2$  и  $\chi_3$  соответственно, то в случае установившегося температурного градиента уравнение теплопроводности будет иметь вид [1]:

$$\chi_1 \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \chi_2 \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \chi_3 \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0. \quad (1)$$

Для кристалла кварца имеет место соотношение  $\chi_1 = \chi_2 = \chi$  и решение уравнения (1) должно удовлетворять граничным условиям:

$$\frac{\partial t}{\partial y} - h(t - t_2) = 0 \quad \text{при } y = B,$$

$$\frac{\partial t}{\partial x} - h(t - t_2) = 0 \quad \text{при } x = A,$$

где  $h = \frac{H}{\lambda}$ ,  $H$  — коэффициент теплоотдачи кристалл-среда (воздух).

Решение

$$\frac{\text{sh}[l(C-z)]}{\text{sh}(lC)} \cos(a_r y) \cos(\beta_s x) \quad (3)$$

удовлетворяет уравнению (1), если

$$l^2 = a_r^2 + \beta_s^2, \quad (4)$$

и удовлетворяет граничным условиям (2), если параметры  $a_r$  и  $\beta_s$  являются решениями трансцендентных уравнений

$$a_r \text{tg} a_r B = h, \quad \beta_s \text{tg} \beta_s A = h.$$

При этих условиях решением задачи является выражение

$$t(x, y, z) = t_2 - \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{4(t_2 - t_1) h^2 \text{sh}[l(C-z)] \cos(a_r y) \cos(\beta_s x)}{\text{sh}(lC) \cos(a_r B) \cos(\beta_s A) [(a_r^2 + h^2)B + h] [(\beta_s^2 + h^2)A + h]}. \quad (5)$$

Ряд (5) является быстро сходящимся, что позволяет определить изометрические поверхности  $t(x, y, z) = \text{const}$ .

Для анизотропных кристаллов вектор  $u(x, y, z)$  смещения атомов из положения равновесия при стационарном тепловом процессе описывается коэффициентом линейного теплового расширения, который является тензором второго ранга  $a_{ij}$ . Если координатные оси выбраны вышеуказанным способом, то этот тензор принимает диагональный вид:

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j, \\ a_i & \text{при } i = j, \end{cases}$$

где  $a_i$  — коэффициент линейного расширения вдоль соответствующих координатных осей. Рентгеновский метод — это основной метод изучения искривления атомных плоскостей кристаллов при температурном градиенте. Но при решении динамических задач рентгеновской оптики [2] функция смещения приблизительно аппроксимируется как квадратичная функция. Это приближение допускает аналитические решения некоторых рентгенодифракционных задач, оправданных экспериментальными результатами [3].

С большой степенью точности можно положить, что

$$\frac{\partial u_z}{\partial x} = a_1 \frac{\partial t}{\partial x} x, \quad \frac{\partial u_z}{\partial y} = a_2 \frac{\partial t}{\partial y} y, \quad \frac{\partial u_z}{\partial z} = a_3 \frac{\partial t}{\partial z} z. \quad (6)$$

Можно показать, что проекция вектора смещения  $u_z(x, y, z)$  имеет вид:

$$u_z(x, y, z) = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k E_{rs} \left[ a_1 \beta_s^{2k+1} \frac{x^{2k+3} \operatorname{sh}[l(C-z)] \cos(a_r y)}{(2k+1)!(2k+3)} + \right. \\ \left. + a_2 a_r^{2k+1} \frac{y^{2k+3} \operatorname{sh}[l(C-z)] \cos(\beta_s x)}{(2k+1)!(2k+3)} + a_3 \operatorname{ch}(lC) \frac{z^{k+2} \cos(a_r y) \cos(\beta_s x)}{k!(k+2)} \right], \quad (7)$$

где

$$E_{rs} = \frac{4\beta_s(t_2 - t_1)h^2}{\operatorname{sh}(lC) \cos(a_r B) \cos(\beta_s A) [(a_r^2 + h^2)B + h][\beta_s^2 + h^2]A + h}.$$

Для кристалла кварца  $a_1 = a_2$ .

Выражение (7) позволяет определить величину искривления атомных плоскостей при установившемся температурном градиенте, что в частности, можно использовать в рентгенодифракционных исследованиях.

Авторы выражают благодарность А. Р. Мкртчяну за ценные замечания и помощь при выполнении работы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Карслоу, Д. Егер. Теплопроводность твердых тел. М., Наука, 1964.
2. З. Г. Пинскер. Рентгеновская кристаллооптика. М., Наука, 1982.
3. В. Л. Инденбом, В. М. Каганер. Всесоюзное совещание «Проблемы рентгеновской диагностики несовершенства кристаллов», с. 67—83, Ереван, 1985.

#### TEMPERATURE FIELD IN ANISOTROPIC MEDIUM IN THE PRESENCE OF A STEADY TEMPERATURE GRADIENT

A. M. YEGHIAZARIAN, Kh. V. KOTANDGIAN, Yu. N. GAZARIAN

A problem of determination of a temperature field in a quartz crystal in the presence of temperature gradient is solved analytically. Isothermic surfaces in a quartz crystal and the function of atom displacement from equilibrium state are determined.

#### ԱՆԻՉՈՏՐՈՊ ՄԻՋԱՎԱՅՐՈՒՄ ԶԵՐՄԱՍՏԻՃԱՆԱՅԻՆ ԴԱՇՏԸ ՀԱՍՏԱՏՎԱԾ ԶԵՐՄԱՍՏԻՃԱՆԱՅԻՆ ԳՐԱԴԻԵՆՏԻ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ա. Մ. ԵՂԻԱԶԱՐԻԱՆ, Խ. Վ. ԿՈՏԱՆԴԳԻԱՆ, ՅՈՒ. Ն. ԳԱԶԱՐԻԱՆ

Անաիտիկորեն լուծված է կվարցի բյուրեղում ջերմաստիճանային դաշտի որոշման խնդիրը, երբ հաստատված է ճերմաստիճանային գրադիենտը։ Որոշված են իզոթերմիկ մակերևույթները կվարցի բյուրեղում և ատոմների հավասարակշռության դիրքերից շեղման ֆունկցիան։