Известия НАН Армении, Физика, т. 32, №6, с. 287—296 (1997)

УДК 539:534.2

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНОВЫЕ ПУЧКИ В ПЬЕЗОПОЛУПРОВОДНИКОВОМ СЛОЕ

А. Г. БАГДОЕВ, А. В. ШЕКОЯН, З. Н. ДАНОЯН

Институт механики НАН Армении

(Поступила в редакцию 18 ноября 1896 г.)

Рассматривается распространение квазимонохроматической нелинейной волны в пьезополупроводниковом слое с учетом электронно-концентрационной нелинейности. Впервые для такой среды выведены эволюционные уравнения для падающей и отраженной волны. Получены нелинейные уравнения Шредингера и решения для узких пучков. Показано, что в отличие от ранее рассмотренных сред, например, пьезодиэлектрика, симметрия падающей и отраженной волн не имеет места. Найдены расстояния фокальных пятен для разных случаев толщины слоя и меры фокусировки пучков.

1. *Введение.* В семидесятые и восьмидесятые годы экспериментально и теоретически интенсивно изучались волны в пьезополупроводниках [1—4], что связано с возможностями усиления волны и построения акустических генераторов. Одно из направлений указанных исследований—это изучение нелинейных волн в пьезополупроводниках со специфической токовой (концентрационной) нелинейностью [5,6]. В этих работах исследованы нелинейные стационарные волны в одномерном приближении. В последнее время разработаны методы решения одномерных, двух- и трехмерных нелинейных нестационарных волновых задач для полупространства и слоя в различных (вязкотермоупругих, пьезодиэлектриках и др.) средах [7—9]. В указанных работах методом эволюционных уравнений и методом нелинейного уравнения Шредингера получены новые аналитические решения, описывающие физические эффекты, которые в предшествующих статьях [5,6] не выявлялись. Для каждой из указанных выше сред вывод нелинейных эволюционных и модулированных (Шредингера) уравнений представляет самостоятельный интерес. Целью настоящей работы является вывод вышеуказанных уравнений для пьезополупроводникового слоя с концентрационной нелинейностью и изучение полученных решений этих уравнений в задачах об узких пучках.

В большинстве акустоэлектронных приборов полупроводниковый элемент пленочный; поэтому в данной работе рассматривается слой пьезополупроводника.

2. *Постановка задачи.* Рассматривается бесконечный, однородный слой электронного пьезополупроводника с толщиной l, торцы которого перпендикулярны к оси x_3. Пьезополупроводник имеет гексагональную или тетрагональную кристаллическую решетку системы $6mm$ или

$4\,mm$. Координантная система выбирается так, чтобы оси x_1 и x_2 находились на одном торце слоя, а ось x_3 была направлена противоположно падающей волне вдоль оси симметрии четвертого или шестого порядка. Плоскость $x_3=0$ свободна от напряжений $(\sigma_{ik}=0)$. На плоскости $x_3=l$ задается возмущение в виде гауссовского пучка, которое распространяется до свободного торца и отражается от него, регистрируясь на плоскости $x_3=l$.

Предполагается, что в слое есть постоянный электрический ток. Ограничимся рассмотрением только токовой нелинейности, которая появляется при меньших интенсивностях упругой волны, когда другие нелинейности (такие, как упругая, геометрическая) не проявляются [3].

Так как упругую и геометрическую нелинейности не учитываем, то уравнения задачи в Лагранжевых и Эйлеровых координатах совпадают.

Учитывая вышесказанное, систему уравнений, описывающую распространение волн в такой среде, где длина свободного пробега электрона намного меньше длины волны, можно записать в виде [10, 11]

$$\rho\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2}=(c_{13}+c_{44})\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_j\partial x_3}+c_{44}\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_3^2}-e_{15}\frac{\partial E_j}{\partial x_3}-e_{31}\frac{\partial E_3}{\partial x_j}\ (j=1,2), \tag{1}$$

$$\rho\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}=(c_{13}+c_{44})\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)+c_{44}\Delta_\perp u_3+ +c_{33}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2}-e_{15}\left(\frac{\partial E_1}{\partial x_1}+\frac{\partial E_2}{\partial x_2}\right)-e_{33}\frac{\partial E_3}{\partial x_3}, \tag{2}$$

$$-\frac{\partial n}{\partial t}+\frac{\sigma_1}{q}\left(\frac{\partial E_1}{\partial x_1}+\frac{\partial E_2}{\partial x_2}\right)+\frac{\sigma_3}{q}\frac{\partial F_3}{\partial x_3}-v_d\frac{\partial n}{\partial x_3}+ +d_{33}\frac{\partial^2 n}{\partial x_3^2}=\mu_{33}\left(n\frac{\partial E_3}{\partial x_3}+E_3\frac{\partial n}{\partial x_3}\right), \tag{3}$$

$$(e_{31}+e_{15})\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)+e_{15}\Delta_\perp u_3+e_{33}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2}+ +\varepsilon_{11}\left(\frac{\partial E_1}{\partial x_1}+\frac{\partial E_2}{\partial x_2}\right)+\varepsilon_{33}\frac{\partial E_3}{\partial x_3}=-qn, \tag{4}$$

$$\frac{\partial E_3}{\partial x_j}=\frac{\partial E_j}{\partial x_3}\ (j=1,2), \tag{5}$$

где ρ—плотность среды, u_j и u_3—компоненты поперечных и продольных смещений, c_{ik}, ε_{ik}, σ_l, e_{lk}—соответственно модули упругости, диэлектрической проницаемости, удельной электропроводности и пьезомодули пьезополупроводника μ_{33}—подвижность электронов, E_l—компоненты электрического поля, n—индуцированное волной изменение концентрации электронов, q—заряд электронов, $v_d=-\mu_{33}E_3^0$—дрейфовая скорость электронов, E_3^0—постоянное электрическое поле, направленное по оси x_3 в направлении отраженной волны, d_{33}—коэффициент продольной диффузии, $\Delta_\perp\equiv\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$.

3. *Вывод эволюционных уравнений.* В работах [8, 9, 12, 13] для высокочастотной асимптотики записано решение квазилинейных систем уравнений в виде суммы двух функций, каждая из которых зависит от своего эйконала. В предположении равенства нулю в основных порядках малости средних значений искомых функций по своим эйконалам (что выполняется для задач о дифракционных пучках) показано, что система уравнений расщепляется на два независимых нелинейных уравнения.

В настоящей работе, поступая аналогичным образом, решения системы уравнений (1—5) ищутся в виде суммы двух функций, одна из которых соответствует падающей волне и однократно штрихована, а вторая—отраженной волне и двукратно штрихована.

Сперва рассмотрим падающую волну. В системе однократно штрихованных уравнений введем новую переменную $\tau_1=\tau_1'-t$, где $\tau_1'=(l-x_3)v^{-1}$, v—линейная фазовая скорость.

Примем порядки физических величин, как в нелинейной акустике [14, 15], а именно, для нормальной невозмущенной волны скорости частицы среды $\frac{\partial u_3'}{\partial\tau_1'}$ принимаются за основной порядок $\delta\left(\frac{\partial u_3'}{\partial\tau_1'}\sim\delta\right)$, тогда для размеров возмущенной области имеет место $\frac{\partial}{\partial x_j}\sim\delta^{-1/2}(j=1,2)$, $\frac{\partial}{\partial\tau_1}\sim\delta^{-1}$ и для поперечных компонент скорости $\frac{\partial u_{1,2}'}{\partial\tau_\perp}\sim\delta^{3/2}$. На основании анализа типичных пьезополупроводников при выбранных оси симметрии и направлении распространения волны можно ввести следующие порядки: $E_3'\sim\delta$, $E_j'\sim\delta^{3/2}$ $(j=1,2)$, $n'\sim\delta$, $d_{33}\sim\delta$, а также порядки электромеханической связи типа $e_{33}^2(2c_{33}\varepsilon_{33})^{-1}\sim\delta$, отношение удельной электропроводности к диэлектрической проницаемости типа $\sigma_3\varepsilon_{33}^{-1}\sim\delta^{-1}$. Нелинейный коэффициент эволюционного уравнения, полученный ниже, имеет порядок δ^{-1}.

После перехода к новой переменной τ_1 и оставляя в системе однократно штрихованных уравнений члены с наибольшими порядками, получаются следующие соотношения:

$$n'(1+v_dv^{-1})-\frac{\sigma_3}{vq}E_3'=0,\quad \frac{e_{33}}{v}\frac{\partial u_3'}{\partial\tau_1}-\varepsilon_{33}E_3'=0, \tag{6}$$

$$v^2=c_{33}\rho^{-1}+e_{33}^2(\rho\varepsilon_{33})^{-1}.$$

В следующем порядке сохраняем члены, которые характеризуют дисперсию, диссипацию и нелинейность. Исключив функции E_i', u_j'

и n' (причем в нелинейном члене функции исключаются, используя соотношения (6)), можно для скорости частиц среды в падающей волне $\psi_1=\frac{\partial u_3'}{\partial\tau_1}$ получить следующее эволюционное уравнение:

$$A\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t\partial\tau_1}+B\frac{\partial^3\psi_1}{\partial t\partial\tau_1^2}-L\Delta_\perp\frac{\partial\psi_1}{\partial\tau_1}+C\Delta_\perp\psi_1-\frac{Ld_{33}}{v^2}\Delta_\perp\frac{\partial^2\psi_1}{\partial\tau_1^2}+$$
$$+Q_1\frac{\partial^4\psi_1}{\partial\tau_1^3\partial t}+P\frac{\partial^2\psi_1}{\partial\tau_1^2}=\Gamma\frac{\partial}{\partial\tau_1}\left(\psi_1\frac{\partial\psi_1}{\partial\tau_1}\right), \qquad (7)$$

где

$$A=2\sigma_3\varepsilon_{33}^{-1},\quad B=-2(1+v_dv^{-1}),\quad C=\frac{\sigma_3Q}{\rho\varepsilon_{33}}-\frac{e_{33}^2\sigma_3}{\rho\varepsilon_{33}^2},$$

$$L=\frac{e_{33}(1+v_dv^{-1})}{\rho\varepsilon_{33}}[Q\varepsilon_{33}e_{33}^{-1}+(e_{31}+e_{15})Nv^{-1}+e_{15}-\varepsilon_{11}\varepsilon_{33}^{-1}e_{33}],$$
$$N=[(C_{13}+C_{44})+e_{33}\varepsilon^{-1}(e_{15}+e_{31})]v^{-1}(\rho-C_{44}v^{-2}) \qquad (8)$$
$$Q=(C_{13}+C_{44})Nv^{-1}+C_{44}+e_{15}e_{33}\varepsilon_{33}^{-1},\quad P=-e_{33}^2\sigma_3(\rho\varepsilon_{33}^2v^2)^{-1}$$
$$Q_1=-2d_{33}v^{-2},\quad \Gamma=2\mu_{33}e_{33}^3\sigma_3\rho^{-1}v^{-4}\varepsilon_{33}^{-3}(1+v_dv^{-1}).$$

В уравнении (7) коэффициенты A и B характеризуют дисперсию, а Q_1 и P—электронное поглощение.

Как видно из выражения для нелинейного коэффициента в (8), при $v_dv^{-1}=-1$ Γ становится бесконечным; это означает, что метод эволюционных уравнений не применим для этого значения v_d.

Как показано впервые в работе [16], уравнение (7) отличается от стандартной формы эволюционного уравнения, полученной для широкого класса сред [8, 9, 17, 18]. Это связано с более сложным видом дисперсионных соотношений для пьезополупроводников.

Для отраженной волны вместо τ_1 вводится переменная $\tau_2=\tau_2'-t$, $\tau_2'=v^{-1}(l+x_3)$. Поступая аналогично, как и для падающей волны, можно получить уравнение для $\psi_2=-\frac{\partial u_3}{\partial\tau_2}$ типа (7), где v заменено на $-v$, ψ_1 на ψ_2 и τ_1 на τ_2. Как видно из соотношений (8), в отличие от пьезодиэлектриков [9] симметрия для падающих и отраженных волн не имеет места.

4. *Вывод уравнений модуляции для квазимонохроматической волны.* В случае квазимонохроматической волны решение уравнения (7) будем искать в следующем виде:

$$\psi_1=\frac{1}{2}\{A_1(\tau_1',x_1,x_2,t)\exp[i\alpha\tau_1-(\nu+i\omega)t]+$$
$$+A_2(\tau_1',x_1,x_2,t)\exp[2(i\alpha\tau_1-(\nu+i\omega)t)]+A_3(\tau_1',x_1,x_2,t)+\text{к.с.}\}, \qquad (9)$$

где A_1 и A_2—амплитуды первой и второй гармоник, а A_3—свободный член, обуславливающий не осциллирующую часть решения, α—основная частота, имеющая порядок δ_1^{-1}, причем $\delta_1^{-1} \ll \delta^{-1}$, ω—приращение частоты за счет дисперсии, ν—коэффициент затухания. При этом предполагается, что $\omega, \nu \ll \alpha$.

Подставляя решение (9) в уравнение (7), приравнивая линейные недифференцируемые члены, содержащие первую гармонику, получим линейные дисперсионные соотношения

$$\omega = -\frac{\alpha e_{33}^2}{2\varepsilon_{33} c_{33}} \cdot \frac{\sigma_3 \varepsilon_{33}^{-1}(\sigma_3 \varepsilon_{33}^{-1} + \alpha^2 d_{33} v_0^{-2})}{\alpha^2(1+v_d v_0^{-1})^2 + (\sigma_{33}\varepsilon_{33}^{-1} + \alpha^2 d_{33} v_0^{-2})^2}, \tag{10}$$

$$\nu = \frac{e_{33}^2}{2c_{33}\varepsilon_{33}} \cdot \frac{\alpha^2(1+v_0^{-1}v_d)\sigma_3}{\varepsilon_{33}[\alpha^2(1+v_0^{-1}v_d)^2 + (\sigma_3 \varepsilon_{33}^{-1} + \alpha^2 v_0^{-2} d_{33})^2]}, \tag{11}$$

где

$$v_0^2 = c_{33}\rho^{-1}, \quad \alpha = kv \approx kv_0[1 + e_{33}^2(2c_{33}\varepsilon_{33})^{-1}].$$

Соотношения (10) и (11) совпадают с известными формулами для поглощения и дисперсии, выведенными в [2, 3, 10], если заменить знак у v_0.

В уравнении для амплитуды второй гармоники предполагая, что $\omega t_1 \gg 1$, где t_1—характерное время, причем $t_1 \approx (l - x_3)v^{-1}$, дифференцируемые члены второй гармоники можно отбросить. Тогда уравнение для амплитуды второй гармоники примет вид

$$A_2 = -\frac{1}{4}\Gamma \alpha A_1^2 \lambda^{-1}, \tag{12}$$

где

$$\lambda = [\omega A + 2\alpha\nu B - \alpha^2 P - 4\alpha^2 \omega Q_1 + i(2\alpha\omega B - \nu A + 4\alpha^3 \nu Q_1)].$$

Для типичных задач стационарной дифракции, где $\frac{\partial A_{1,2}}{\partial t} = 0$ и оператор $\Delta_\perp A_{1,2,3} \sim \delta^{-1} A_{1,2,3}$, слагаемые с A_2 в уравнения для $A_{1,2}$ не войдут.

Исключая A_2 с помощью выражения (12), для уравнения амплитуды первой гармоники следует

$$\frac{\partial A_1}{\partial \tau_1'}\{[3\alpha^2 \nu Q_1 - \nu A + (2\omega - \alpha)\alpha B] + i[(\alpha+\omega)A - 2\alpha\nu B + 2\alpha P + 3\omega\alpha^2 Q_1]\} +$$

$$+ \left(C + \frac{\alpha^2 L d_{33}}{v^2} - i\alpha L\right)\Delta_\perp A_1 = \frac{\alpha^3 \Gamma^2}{8}\lambda^{-1}|A_1|^2 A_1 \exp(-2\nu\tau_1'). \tag{13}$$

Отбрасывая заведомо малые члены в коэффициентах уравнения (13), можно получить

$$i\alpha \frac{\partial A_1}{\partial \tau_1'} + \frac{C}{A}\Delta_\perp A_1 = P_2(\varkappa_1 + i\varkappa_2)|A_1|^2 A_1, \tag{14}$$

где

$$P_2 = \frac{\Gamma^2 \alpha^3 \exp(-2\nu\tau_1')}{8A(\varkappa_1^2 + \varkappa_2^2)}, \quad \varkappa_1 = A\omega + 2\alpha\nu B - \alpha^2 P + 4\alpha^2 \omega Q_1, \tag{15}$$

$$\varkappa_2 = \nu A - 2\alpha\omega B + 4\alpha^2\nu Q_1.$$

В коэффициентах уравнения (14) отброшены члены, не содержащие большой множитель α.

Для отраженной волны решение уравнения для ψ_2 будем искать в виде (9), где следует заменить A_l на A_l', τ_1' на τ_2', ν и ω на ν' и ω' (последняя штрихованная пара получается из (10) и (11) заменой v_0 на $-v_0$). Тогда для A_1' получим уравнение

$$i\alpha \frac{\partial A_1'}{\partial \tau_2'} + \frac{C}{A'} \Delta_\perp A_1' = P_2'(\varkappa_1' + i\varkappa_2')|A_1'|^2 A_1', \tag{16}$$

где штрихованные коэффициенты получаются из (15) и (8) заменой v на $-v$. Из соотношений (8) и (15) видно, что для уравнений (14) и (16) симметрия не имеет места. Здесь и выше эта несимметричность обусловлена наличием электрического тока.

5. *Уравнения для безразмерной ширины пучка, радиуса кривизны волны и набега фазы на оси пучка.* Вывод уравнений, указанных в заглавии пункта, будет сделан для падающей волны, а для отраженной получится заменой соответствующих коэффициентов на штрихованные.

Записывая $A_1 = a_1 \exp(i\varphi_1)$, где φ_1 — возмущенный эйконал, а a_1 — действительная амплитуда, и подставляя в уравнение (14), отделяя мнимые и действительные части, переходя к цилиндрическим координатам для осесимметричной задачи, получим уравнения для a_1 и φ_1. Решение последних ищется в виде

$$a_1 = b_1 f_1^{-1} \exp\left[-\frac{r^2}{2}(r_1 f_1)^{-2}\right], \quad \varphi_1 = \sigma_1'(\tau_1') + \frac{r^2}{2} R_1^{-1}(\tau_1'), \tag{17}$$

где f_1 — безразмерная ширина пучка, σ_1' — набег фазы волны на оси пучка, $\alpha R_1 v_0^{-1}$ — переменный радиус кривизны фронта волны, b_1 и r_1 — амплитуды и радиус пучка на границе $x_3 = l$. Подставляя (17) в уравнения для a_1 и φ_1, обычным образом [9] получим следующую систему уравнений:

$$R_1^{-1} = \frac{\alpha A}{2Cf_1}\frac{df_1}{d\tau_1'} + \frac{\varkappa_2 P_2 A b_1^2}{2Cf_1^2}, \tag{18}$$

$$\frac{d\sigma_1'}{d\tau_1'} = \frac{2C}{\alpha A r_1^2 f_1^2} - \frac{P_2\varkappa_1 b_1^2}{\alpha f_1^2} \equiv G f_1^{-2}, \tag{19}$$

$$\frac{d^2 f_1}{d\tau_1'^2} = \frac{M}{f_1^3} - \frac{P_2\varkappa_2\nu A b_1^2}{\alpha C f_1}, \tag{20}$$

$$\text{где} \quad M = \alpha^{-2}\left(\frac{4C^2}{A^2 r_1^4} + \frac{4P_2\varkappa_1 C b_1^2}{A r_1^2} - \frac{4P_2^2\varkappa_2^2 b_1^4}{4}\right). \tag{21}$$

Для отраженной волны имеют место уравнения (18)—(21), где следует индекс один заменить на два для R_1, σ_1', f_1, b_1 и r_1, а остальные величины заменить соответствующими штрихованными величинами.

6. *Граничные условия.* Из постановки задачи ясно, что для механических величин должны быть заданы граничные условия на торцах слоя ($x_3=0$, $x_3=l$). Первое из них в плоскости $x_3=l$ или $\tau_1'=0$ относится к падающей волне. Предполагается, что в этой плоскости задается пучок с гауссовским профилем и выполняются следующие условия:

$$f_1(0)=1, \quad \frac{df_1(0)}{d\tau_1'}=F, \quad \sigma_1'(0)=0, \quad F=\frac{2C}{\alpha A}\left[R_1^{-1}(0)-\frac{\varkappa_2 P_2 b_1^2 A}{2C}\right]. \tag{22}$$

Уравнения (18)—(20) будем решать с граничными условиями (22). Для отраженной волны граничные условия заданы в плоскости $x_3=0$, в которой предполагается, что $\sigma_{31}=\sigma_{32}=\sigma_{33}=0$. В наивысшем порядке эти уравнения расщепляются, так как ограничиваемся изучением пучка квазипродольных волн. В наивысшем порядке условие $\sigma_{33}=0$ дает

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_3}=0. \tag{23}$$

В наивысшем порядке автоматически выполняется условие $\sigma_{31}=\sigma_{32}=0$.

Граничное условие $D_3-D_3'=\varkappa$ при $x_3=0$ (где D_3' —нормальная компонента электрического смещения вне слоя, а $\varkappa$—поверхностная плотность заряда) в случае $D_3'=0$, т. е. слоя, помещенного внутри металлического проводника, дает $D_3=\varkappa$, что служит для определения $\varkappa$.

Поступая аналогично [9], можно получить для параметров пучка в плоскости $x_3=0$, $\tau_2'=lv^{-1}$ следующие условия:

$$b_1=b_2, \; f_1\left(\frac{l}{v}\right)=f_2\left(\frac{l}{v}\right), \; R_1\left(\frac{l}{v}\right)=R_2\left(\frac{l}{v}\right), \; \sigma_1'\left(\frac{l}{v}\right)=\sigma_2'\left(\frac{l}{v}\right),$$
$$\frac{df_1\left(\frac{l}{v}\right)}{d\tau_1'}=\frac{df_2\left(\frac{l}{v}\right)}{d\tau_2'}. \tag{24}$$

Уравнения (18)—(20), написанные для отраженной волны, следует решать с граничными условиями (24). Из второго условия (24) следует, что всюду $r_1=r_2$.

7. *Решение уравнений для безразмерной ширины пучка.* Решение уравнения (20) будем искать в случае слабого и сильного поглощения. В первом случае $\nu\tau_1'$ и $\nu\tau_2'$ малы, и экспоненты, входящие в $\varkappa_{1,2}'$ и $\varkappa_{1,2}$, можно считать равными единице. В случае сильного поглощения экспоненты можно считать нулями и задача будет линейной. В обоих случаях сильного и слабого поглощения второе слагаемое в правой части (20) можно отбросить.

С учетом вышесказанного решение уравнения (20) с граничными условиями (22) для $M>0$ и $M<0$ имеет следующий вид:

$$f_1^2 = \frac{M}{F^2+M} + (F^2+M)\left[\tau' + \frac{l}{v} \mp \frac{|F|}{F^2+M}\right]^2, \tag{25}$$

где $\tau' = -\frac{x_3}{v}$, $F = \frac{df_1\left(-\frac{l}{v}\right)}{d\tau'}$. В формуле (25) следует взять знак минус для случая $F<0$ и знак плюс для $F>0$.

Уравнение (20) для отраженного пучка с граничными условиями (24) имеет решение в следующем виде:

$$f_2^2 = \left[F_1^2 + \frac{M'}{f_1^2(0)}\right][\tau'' \pm |F_1| f_1(0)]^2 + \frac{M'}{F_1^4 + M f_1^{-2}(0)}, \tag{26}$$

где $F_1 = df_1(0)/d\tau'$, $\tau'' = x_3 v^{-1}$. Выбор знаков в (26) будет сделан в дальнейшем.

Решения уравнений (18) и (19) не приводятся, так как для дальнейших исследований они не понадобятся.

8. *Анализ полученных решений.* Рассмотрение будет ограничено случаем фокальных пятен, который соответствует $M>0$, $F<0$. Тогда в (25) можно в скобках подставить знак плюс и отбросить знак модуля. Причем полученная формула годится как для $\tau' < \tau'_{фп}$, так и для $\tau' > \tau'_{фп}$, где

$$\tau'_{фп} = -\frac{l}{v} - \frac{F}{F^2+M}. \tag{27}$$

Формула (27) получается из условия $\frac{df_1}{d\tau'} = 0$.

При значении l, для которого $\tau'_{фп} < 0$, фокальное пятно находится внутри слоя, в случае $\tau'_{фп} > 0$ — вне слоя и при $\tau'_{фп} = 0$ — на границе слоя. Последний случай будет при $l = -\frac{vF}{F^2+M}$, тогда формула (25) упрощается и принимает вид

$$f_1^2 = \frac{M}{F^2+M} + (F^2+M)(\tau')^2. \tag{28}$$

Для отраженной волны ограничимся случаем $M'>0$. Формулу (25) можно записать также в виде

$$f_1^2 = \frac{M}{F^2+M} + (F^2+M)(\tau' - \tau'_{фп})^2. \tag{29}$$

Из (29) определяем $\frac{df_1(0)}{d\tau'} = -\tau'_{фп}\frac{F^2+M}{f_1(0)}$ и знак $\frac{df_1(0)}{d\tau'}$ определяется знаком $\tau'_{фп}$. Когда $\tau'_{фп} < 0$, то $\frac{df_1(0)}{d\tau'} > 0$, $\frac{df_2(0)}{d\tau''} > 0$, и в (26) следует брать знак плюс. При $\tau'_{фп} > 0$

$$\frac{df_1(0)}{d\tau'}<0, \quad \frac{df_2(0)}{d\tau''}<0,$$

тогда в (26) выбирается знак минус. В обоих случаях в формуле (26) вторая квадратная скобка может быть записана в виде

$$[\tau''+F_1f_1(0)]. \tag{30}$$

Фокальное пятно отраженной волны находится из условия $\frac{df_2}{d\tau''}=0$. Тогда, приравнивая нулю (30), можно найти

$$\tau''_{фп}=-F_1f_1(0). \tag{31}$$

При $F_1<0$ $\tau''_{фп}$ находится внутри слоя, тогда как $\tau'_{фп}$ находилось вне слоя, а при $F_1>0$ $\tau''_{фп}$ находится вне слоя, в то время как $\tau'_{фп}$ находится внутри слоя.

В случае $\tau'_{фп}=df_1(0)/d\tau'=df_2/d\tau''=0$, учитывая, что $f_1^2(0)=M(F^2+ +M)^{-1}$, формулу (26) можно написать в виде

$$f_2^2=\frac{M'}{f_1^2(0)}(\tau'')^2+f_1^2(0)=\frac{M'(F^2+M)}{M}(\tau'')^2+M(F^2+M)^{-1}. \tag{32}$$

Итак, $\tau'_{фп}=0$, $\tau''_{фп}=0$, т. е. обе фокальные точки находятся на свободной границе среды.

Заключение. В настоящей работе для слоя пьезополупроводника с концентрационной нелинейностью получены более сложное эволюционное уравнение и нелинейное уравнение Шредингера. Показано, что решения, известные из работ [8, 9], пригодны также и для этих более сложных уравнений. Однако в отличие от сред, рассмотренных в [8, 9], в пьезополупроводниках падающие и отраженные пучки из-за отличия коэффициентов в уравнениях не симметричны, что обусловлено электрическим током. Выведены формулы для расстояний фокальных пятен, как для отраженных, так и для падающих волн. Показано, что они совпадают на границе при определенной толщине слоя. Из расчетов следует, что для дифракционных задач неосциллирующие части решения пренебрежимо малы и не влияют на уравнения для амплитуд первой и второй гармоник. Указан предел применения развиваемой в данной работе теории.

Полученные результаты могут быть применены при расчетах акусто-электронных устройств, линий задержки, для исследований свойств материалов пьезополупроводников, а также в других технических задачах.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Пустовойт. УФН, 97, 257 (1969).
2. Дж. Такер, В. Рэмптон. Гиперзвук в физике твердого тела. М., 1975.
3. В. А. Красильников, В. В. Крылов. Введение в физическую акустику. М., Мир, 1984.

4. **М. К. Балакирев, И. А. Гилинский.** Волны в пьезокристаллах. Новосибирск, Наука, 1982.
5. **Ю. В. Гуляев,** ФТТ, **12**, 415(1970).
6. **Р. К. Tien.** Phys. Rev., **171**, 970 (1968).
7. **А. Г. Багдоев, А. В. Шекоян.** Изв. АН АрмССР, Механика, **40** №2, 14(1987).
8. **А. Г. Багдоев, А. В. Шекоян.** Изв. АН Армении, Механика, **44**, №1, 28(1991).
9. **А. Г. Багдоев, А. В. Шекоян.** Изв. НАН Армении, Механика, **48**, №1, 64(1995).
10. **Дж. Мак-фи.** В кн.: «Физическая акустика» под ред. У. Мэзона, т. IV, ч. 1, М., Мир, 1969.
11. **А. Г. Багдоев, А. В. Шекоян.** Изв. АН АрмССР, Механика, **34**, №4, 3(1981).
12. **В. В. Канер, О. В. Руденко.** Вестник МГУ, сер. физика, астрономия, **19**, 78(1978).
13. **P. Carbonaro.** Jour. of Appl. Math. and Phys., **37**, № 1, 43 (1986).
14. **A. G. Bagdoev, A. V. Shekoyan.** Phys. stat. sol. (a), **89**, 499 (1985).
15. **О. В. Руденко, С. И. Солуян.** Теоретические основы нелинейной акустики. М., Наука, 1975.
16. А. В. Шекоян. В сб. IV Симпозиума «Теоретические вопросы магнитоупругости». Ереван, Изд. ЕГУ, 1989, с. 203.
17. **А. Г. Багдоев, Л. Г. Петросян.** Изв. АН АрмССР, Механика, **36**, №5, 3(1983).
18. **А. Г. Багдоев, Г. Г. Оганян.** Изв. АН АрмССР, Механика, **37**, №1, 34(1984).

NONLINEAR WAVE BEAMS IN A PIEZOSEMICONDUCTING LAYER

A. G. BAGDOEV, A. V. SHEKOYAN, and Z. N. DANOYAN

The propagation of quasi-monochromatic nonlinear wave in a piezosemiconducting layer taking into account electron-concentration nonlinearity is considered. For such medium the evolution equations for incoming and reflected waves are derived. Nonlinear Schroedinger equations and solutions for narrow beams are obtained. It is shown that symmetry of incoming and reflected waves does not take place. The focusing of beams is investigated.

ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ԱԼԻՔԱՅԻՆ ՓՆՋԵՐԸ ՊՅԵԶՈԿԻՍԱՀԱՂՈՐԴԻՉ ՇԵՐՏՈՒՄ

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈԵՎ, Ա. Վ. ՇԵԿՈՅԱՆ, Զ. Ն. ԴԱՆՈՅԱՆ

Աշխատանքում ուսումնասիրված են քվազիմոնոքրոմատիկ ոչ գծային ալիքային փնջերի տարածման օրինաչափությունները կիսահաղորդիչ շերտում, որի մի եզրը ազատ է լարումներից։ Հաշվի առնելով միայն էլեկտրոնային կոնցենտրացիոն ոչ գծայնությունը, առաջին անգամ նշված միջավայրում արտածված են ոչ գծային էվոլյուցիոն և Շրեդինգերի հավասարումները, որոնք լուծված են նեղ փնջերի համար։ Ցույց է տրված, որ ընկնող և անդրադարձող ալիքների համար սիմետրիա գոյություն չունի։