Известия НАН Армении, Физика, т. 32, №6, с. 275—282 (1997)

УДК 530.12

КВАНТОВОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ СКАЛЯРНЫХ ЧАСТИЦ ДВИЖУЩИМИСЯ ЗЕРКАЛАМИ. II.

Л. Ш. ГРИГОРЯН, А. А. СААРЯН

Институт прикладных проблем физики НАН Армении

(Поступила в редакцию 26 ноября 1996 г.)

Рассмотрены приложения выведенной в первой части работы общей формулы для числа квантов скалярного поля, излученных ускоренно движущимися зеркалами. Исследованы различные случаи колебаний плоского зеркала, включая случай акустических волн, возбужденных на поверхности зеркала.

1. *Введение.* Взаимодействие вакуумных флуктуаций квантованного поля с ускоренно движущимися зеркалами приводит к излучению квантов этого поля [1,2]. В первой части [3] данной работы исследовалось квантовое излучение скалярных частиц зеркалами, медленно движущимися в пространстве-времени Минковского. Методом теории возмущений рассчитаны коэффициенты преобразования Боголюбова, связывающие начальное (in) и конечное (out) состояния вакуума (соответственно до начала и после завершения движения зеркала) массивного скалярного поля. С их помощью можно рассчитать спектральное распределение числа излученных квантов при произвольном достаточно медленном колебании зеркала.

Здесь мы рассмотрим некоторые приложения этих результатов. В п. 2 исследован наиболее простой случай двумерного пространства-времени. Подробно рассмотрены гармонические колебания зеркала. Рассчитаны спектральная плотность числа квантов и полная энергия излучения. Более реалистический случай четырехмерного пространства-времени исследован в п. 3. Рассмотрены случаи как бегущей, так и стоячей поверхностных волн, возбужденных на плоской поверхности зеркала. Выводы представлены в п. 4.

2. *Излучение в двумерном пространстве-времени.* Пусть $\varphi(x)$ — скалярное поле, удовлетворяющее граничному условию Дирихле на гиперповерхности S движущегося зеркала. Если S мало отличается (в смысле, указанном в [3]) от статической гиперповерхности S_0, то для числа частиц $n(\nu)d\nu$, излученных в интервале квантовых чисел ν, $\nu+d\nu$ в первом неисчезающем приближении по отклонению $\xi^l=n^l\xi$ гиперповерхности S от S_0 справедлива формула [3]

$$n(\nu)=\int|\beta_{\nu'\nu}|^2d\nu',$$

$$\beta_{\nu'\nu}=i\int_{S_0}n^ln^k[\partial'_l\varphi_{o\nu'}(x')][\partial'_k\varphi_{o\nu}(x')]\xi(x')d\Sigma', \tag{1}$$

где $\beta_{\nu'\nu}$ —коэффициенты Боголюбова, n^i —нормаль к гиперповерхности S_0, $\varphi_{0\nu}$—собственные функции соответствующей граничной задачи (задача Дирихле) для гиперповерхности S_0.

Для двумерного пространства-времени (гиперповерхность S_0—прямая $x=0$)

$$\varphi_{0\nu}=\varphi_{0k}=-\frac{i}{\sqrt{\pi\omega}}\sin kx e^{-i\omega t},\quad \omega=\sqrt{k^2+m^2}, \tag{2}$$

где m—масса квантов скалярного поля, и поэтому согласно (1)

$$\beta_{kk'}=-\frac{ikk'}{\pi\sqrt{\omega\omega'}}\xi(\omega+\omega'),\qquad \xi(\omega)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\xi(t)e^{-i\omega t}dt \tag{3}$$

(для определенности в качестве области квантования выбрано полупространство $x>0$). Формула (3) в случае $m=0$ в первом приближении по ξ' совпадает с точной формулой, выведенной в [4] для случая безмассового поля $\varphi(x)$. Из (1) с учетом формулы (3) для плотности распределения числа частиц по модам k получим

$$n(k)=\frac{k^2}{\pi^2\omega}\int\limits_0^\infty\frac{k'^2}{\omega'}|\xi(\omega+\omega')|^2dk', \tag{4}$$

где частота ω и волновое число k связаны соотношением (2).

В случае гармонических колебаний $\xi(t)=\xi_0\cos\omega_0 t$ число квантов, излученных в единицу времени в область $x>0$, определяется выражением

$$n(k)=\frac{\xi_0^2k^2}{2\pi\omega}\sqrt{(\omega_0-\omega)^2-m^2},\quad m\leqslant\omega\leqslant\omega_0-m. \tag{5}$$

Отсюда в качестве необходимого условия наличия излучения имеем $\omega_0>2m$, причем максимальная частота излученных квантов равна ω_0-m. Энергия, излученная в единицу времени, вычисленная с помощью числа квантов (5), равна

$$E=\int\limits_0^\infty\omega n(k)dk=\frac{\xi_0^2\omega_0^4}{24\pi}f\left(\frac{m}{\omega_0}\right),$$

$$f(x)=12\int\limits_x^{1/2}\sqrt{y^2-x^2}\,\sqrt{(1-y)^2-x^2}\,dy,\quad 0\leqslant x\leqslant 1/2. \tag{6}$$

График функции $f(x)$ приведен на рис. 1, откуда видно, что максимальная энергия излучения соответствует безмассовому случаю. Формулы (5), (6) справедливы при условии $d\xi/dt\sim\xi_0\omega_0\ll 1$ (см. [3]). С учетом $\omega_0>2m$ это приводит к ограничению $\xi_0\ll m^{-1}$ на амплитуду колебаний зеркала. Отсюда следует, что рассмотренный общий случай массивного поля представляет лишь академический интерес, и с практической точки зрения наиболее важен случай безмассового поля. В этом пределе соответствующие формулы получаются из (5), (6) предельным переходом $m \to 0$ ($\hbar$ и c восстановлены):

$$n(\omega) = \frac{\xi_0^2}{2\pi c^2}\,\omega(\omega_0 - \omega), \quad \omega \leqslant \omega_0, \quad E = \frac{\hbar \xi_0^2 \omega_0^4}{24\pi c^2}. \tag{7}$$

Постоянная Планка в формуле для энергии указывает на квантовый характер процесса излучения.

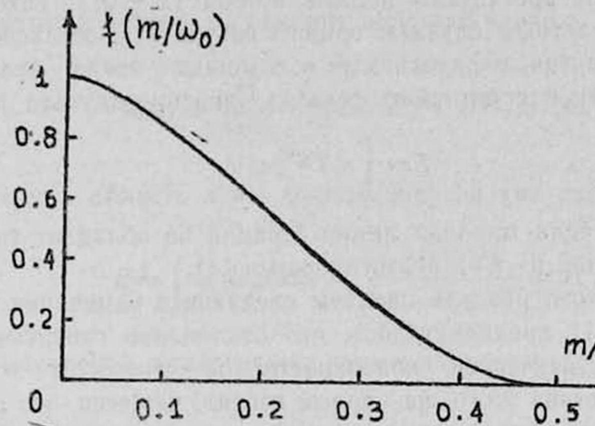

Рис. 1. Зависимость $f = E(m)/E(0)$ (см. формулу (6)) от m/ω_0, где $E(m)$ — энергия излучения скалярных частиц массы m гармонически колеблющимся зеркалом в двумерном пространстве-времени.

В случае безмассового поля можно получить простую формулу для мощности излучения при произвольном движении зеркала. Действительно, с учетом формулы (4) при $m=0$ энергию, излученную в единицу времени (в области $x>0$) можно представить в виде

$$E = \int \omega n(\omega) d\omega = \frac{2i}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi(t)\xi(t')}{(t - t' + i\varepsilon)^5}\, dt\, dt', \quad \varepsilon > 0. \tag{8}$$

Перейдя к новым переменным $t_1 = t' - t$, $t_2 = t' + t$, интеграл по t_1 можно преобразовать следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t_1)}{(t_1 - i\varepsilon)^5}\, dt_1 = \mathrm{p.v.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t_1)}{t_1^5}\, dt_1 + \int_C \frac{f(t_1)}{t_1^5}\, dt_1 = \frac{i\pi}{4!} f^{(4)}(0), \tag{9}$$

где

$$f(t_1) = \xi\left(\frac{t_2 + t_1}{2}\right) \xi\left(\frac{t_2 - t_1}{2}\right), \tag{10}$$

а C—малая полуокружность в комплексной плоскости t_1, обходящая точку $t_1=0$ снизу. С учетом (9) и условий $\xi(t)\to 0$ при $t\to\pm\infty$, после интегрирования по частям получим

$$E=\frac{1}{12\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|\xi''(t)|^2 dt. \tag{11}$$

Этот результат совпадает с аналогичной формулой, выведенной в [5] с помощью тензора энергии-импульса (различие в коэффициентах обусловлено тем, что мы рассматриваем излучение в область $x>0$, тогда как в [5] рассчитаны полные потери ($x \gtrless 0$)). Такое совпадение является частным случаем общего результата, согласно которому в двумерии энергии, определяемые с помощью числа квантов $n(\omega)$ по формуле (8) и с помощью тензора энергии-импульса по формуле

$$E=\int \langle T^{00}\rangle dV, \tag{12}$$

эквивалентны, если мировая линия зеркала не обладает так называемыми $u=t-x$ или $v=t+x$ асимптотиками [4].

В конце этого раздела сделаем следующее замечание. При выводе формулы (1) предполагалось, что отклонение гиперповерхности S зеркала от статической поверхности S_0 стремится к нулю при $t\to\pm\infty$. Вследствие этого, на первый взгляд, кажется, что она не применима к рассмотренному выше случаю гармонических колебаний. Однако мы могли бы поступить следующим образом. Вместо строго гармонической функции можно было выбрать $\xi(t)=\xi_0\cos\omega_0 t\cdot F(\alpha,t)$, где F—обрезающая функция ($F(0,t)=1$, α—параметр), удовлетворяющая указанному выше условию: $F(\alpha,t)\to 0$ при $t\to\pm\infty$. Произведя необходимые вычисления, например, с $F(\alpha,t)=e^{-\alpha t^2}$ (в действительности в пределе $\alpha\to 0$ результат не должен зависеть от вида этой функции), и переходя в конечных формулах к пределу $\alpha\to 0$, мы снова придем к формулам (5—7) для числа излученных в единицу времени квантов и энергии излучения. Таким образом, предложенная схема вычислений применима к гармоническим колебаниям, если предполагать, что они асимптотически выключаются в бесконечно прошлом (*in*-область) и в бесконечно будущем (out-область).

3. *Четырехмерный случай.* Рассмотрим квантовое излучение скалярных частиц в четырехмерном пространстве-времени при малых колебаниях плоского зеркала (плоскость $x=0$). Аналогично двумерному случаю квантованное поле рассматривается в полупространстве $x>0$. Невозмущенные собственные функции

$$\varphi_{\omega\nu}\equiv\varphi_{ok}=\frac{\sin k_1 x}{2i\pi\sqrt{\pi\omega}}\, e^{i\mathbf{k}_\perp \mathbf{x}_\perp - i\omega t}, \quad \omega=\sqrt{k_1^2+k_2^2+k_3^2+m^2}, \tag{13}$$

где $\mathbf{x}_\perp=(y,z)$—координаты в плоскости зеркала. Из (1) для числа частиц моды $\mathbf{k}$ получим

$$n(\mathbf{k})=\frac{1}{16\pi^6}\int\frac{k_1^2k_1'^2}{\omega\omega'}\,|\xi(\omega+\omega',\ \mathbf{k}_\perp+\mathbf{k}_\perp')|^2d\mathbf{k}',$$

$$\xi(\omega,\mathbf{k}_\perp)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\xi(t,y,z)e^{i\mathbf{k}_\perp\mathbf{x}_\perp-i\omega t}\,dtdydz. \tag{14}$$

Рассмотрим несколько приложений этой формулы в случае $m=0$. Пусть сначала плоскость колеблется как целое: $\xi=\xi(t)$ и

$$\xi(\omega,\mathbf{k}_\perp)=4\pi^2\xi(\omega)\delta(\mathbf{k}_\perp). \tag{15}$$

Число частиц в расчете на единицу площади равно

$$n(\mathbf{k})=\frac{k_1^2}{4\pi^4\omega}\int\limits_{k_\perp}^{\infty}|\xi(\omega+\omega')|^2\sqrt{\omega'^2-k_\perp^2}\,d\omega'. \tag{16}$$

Излученная в область $x>0$ полная энергия (на единицу площади)

$$E=\int\omega n(\mathbf{k})d\mathbf{k}=\frac{1}{i\pi^3}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\xi(t)\xi(t')}{(t-t'+i\varepsilon)^7}\,dtdt'. \tag{17}$$

После вычислений, аналогичных двумерному случаю, получим

$$E=\frac{1}{720\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\xi'''(t)|^2dt. \tag{18}$$

С учетом вклада излучения в области $x<0$ эта формула совпадает с результатом работы [5], полученным с помощью тензора энергии-импульса.

Перейдем к случаю бегущей поверхностной волны (например, акустической)

$$\xi(t,y,z)=f(z-v_0t), \tag{19}$$

возбужденной на поверхности плоского зеркала и распространяющейся по направлению оси z со скоростью v_0. При этом фурье-образ смещения

$$\xi(\omega,\mathbf{k}_\perp)=\frac{2\pi^2}{v_0}\delta(k_2)\delta\left(k_3-\frac{\omega}{v_0}\right)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(z)e^{i(k_3+\omega/v_0)z/2}\,dz. \tag{20}$$

Он равен нулю при $v_0<1$, так как $k_3\leqslant\omega$. В этом случае кванты не излучаются, что становится очевидным, если перейти в систему отсчета, которая движется вместе с волной. В случае гармонических колебаний

$$\xi=\xi_0\cos(k_0z-\omega_0t) \tag{21}$$

с $\omega_0>k_0$ излучаются кванты, удовлетворяющие условию

$$\omega_0-\omega\geqslant\sqrt{k_2^2+(k_0-k_3)^2}. \tag{22}$$

Число таких квантов, излученных в единицу времени с единицы площади зеркала, определяется формулой

$$n(\mathbf{k})=\frac{k_1^2\xi_0^2}{8\pi^3\omega}\sqrt{(\omega_0-\omega)^2-k_2^2-(k_0-k_3)^2}. \tag{23}$$

Ее предел при $k_0\to 0$ соответствует плоскости, колеблющейся как целое. В этом случае формула для числа квантов в интервале частот $\omega,\omega+d\omega$, излученных в телесный угол $d\Omega$, в единицу времени и с единицы поверхности имеет вид

$$\begin{gathered} n(\mathbf{k})\omega^2 d\omega d\Omega=\frac{\xi_0^2}{8\pi^3}\cos^2\theta(\omega_0^2-2\omega_0\omega+\omega^2\cos^2\theta)^{1/2}d\omega d\Omega, \\ \omega_0-\omega\geqslant\omega|\sin\theta|,\ -\pi/2\leqslant\theta\leqslant\pi/2, \end{gathered} \tag{24}$$

где θ—угол между нормалью поверхности зеркала и направлением излучения. Спектральная плотность числа квантов получается отсюда интегрированием по телесному углу:

$$n(\omega)=\frac{\xi_0^2\omega_0^4}{32\pi^2}\left[u(1-u)^3+u^3(1-u)+\frac{1}{2}(1-2u)^2\ln|1-2u|\right],\ u\equiv\omega/\omega_0. \tag{25}$$

Полное число N квантов и энергия E, излученные в единицу времени с единицы поверхности зеркала, имеют вид ($\hbar$ и c восстановлены)

$$N=\frac{\xi_0^2\omega_0^5}{720\pi^2c^4},\qquad E=\frac{\hbar\xi_0^2\omega_0^6}{1440\pi^2c^4}. \tag{26}$$

Эти формулы являются четырехмерными аналогами (7). Формулу для энергии (26) можно получить также непосредственно из (18) подстановкой $\xi(t)=\xi_0\cos\omega_0 t$, полагая, что возмущение асимптотически выключается в областях $t\to\pm\infty$.

В заключение рассмотрим случай стоячей акустической волны, возбужденной на поверхности плоского зеркала в полосе $0\leqslant z\leqslant l$, $-\infty<y<\infty$:

$$\xi=\xi_0\cos\omega_0 t\sin k_0 z,\quad k_0=\pi n/l,\quad n=1,2,3,\ldots \tag{27}$$

при $0\leqslant z\leqslant l$, и $\xi=0$ в противном случае. Подставляя фурье-образ

$$\xi(\omega,\mathbf{k}_\perp)=2\pi^2\xi_0\delta(\omega-\omega_0)\delta(k_2)\frac{1-(-1)^n e^{ik_3 l}}{k_0-k_3^2/k_0}, \tag{28}$$

из (14) можно вывести следующую формулу:

$$n(\mathbf{k})=\frac{k_1^2\xi_0^2}{8\pi^4\omega}\int\limits_{u_1}^{u_2}[1-(-1)^n\cos\pi nu]\sqrt{(u-u_1)(u_2-u)}\,\frac{du}{(1-u^2)^2} \tag{29}$$

для числа квантов моды $\mathbf{k}$, излученных в единицу времени и в расчете на единицу длины в направлении оси y,

$$k_0 u_{2,1} = k_3 \pm \sqrt{(\omega_0 - \omega)^2 - k_2^2}. \tag{30}$$

При этом должны выполняться условия

$$\omega = \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2} \leqslant \omega_0, \quad |k_2| \leqslant \omega_0 - \omega. \tag{31}$$

Заметим также, что $n(k_1, k_2, -k_3) = n(k_1, k_2, k_3)$, как и следовало ожидать из симметрии задачи.

Разумеется, сделанное в конце предыдущего раздела замечание о применимости формулы (1) к гармоническим колебаниям поверхности зеркала, остается в силе и в четырехмерном случае.

4. *Выводы.* Исследовано квантовое излучение скалярных частиц зеркалами, медленно движущимися в пространстве-времени Минковского. Методом теории возмущений рассчитаны коэффициенты преобразования Боголюбова (см. формулу (19) в [3]), связывающие начальное (in) и конечное (out) состояния вакуума массивного скалярного поля (соответственно до начала и после завершения движения зеркал). С их помощью можно рассчитать спектральное распределение числа излученных квантов при произвольном достаточно медленном колебании зеркал.

В случае двумерного пространства-времени вычислено число квантов, излученных скалярным полем (формула (5)), и рассчитана полная энергия излученных квантов. В частном случае безмассового поля формула (11) для полной энергии совпадает с результатом работы [5], рассчитанным путем перенормировки тензора энергии-импульса скалярного поля. Такое совпадение не тривиально и не всегда имеет место [4].

Для четырехмерного пространства-времени рассмотрен случай (а) плоского зеркала, колеблющегося как целое, а также случай (б) бегущей и (в) стоячей волн, возбужденных на поверхности плоского зеркала. Рассчитано спектральное распределение числа излученных квантов для безмассового поля (формулы (16), (23) и (29) соответственно). В случае (а) рассчитана также полная энергия излучения (18), которая вновь совпадает с результатом, полученным путем перенормировки тензора энергии-импульса [5]. В случае (б) излучение имеет место только при фазовой скорости бегущей волны больше скорости света. И наконец, в случае (в) кванты излучаются в области частот $(0, \omega_0)$, где ω_0—частота стоячих, например, ультразвуковых колебаний, возбужденных на поверхности плоского зеркала.

Авторы признательны участникам общеинститутского семинара ИППФ НАН Армении и, в частности, проф. А. Р. Мкртчяну за ценные обсуждения и критические замечания.

Работа выполнена в рамках гранта 96-703 Министерства науки и образования Республики Армения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **А. А. Гриб, С. Г. Мамаев, В. М. Мостепаненко.** Квантовые эффекты в интенсивных внешних полях. М. Атомиздат, 1980.
2. **Н. Биррел, П. Девис.** Квантованные поля в искривленном пространстве-времени. М., Мир, 1984.
3. **Л. Ш. Григорян, А. А. Саарян.** Известия НАН Армении, Физика, **32**, 223(1997).
4. **W. R. Walker.** Phys. Rev. D, **31**, 767 (1985).
5. **L. H. Ford, A. Vilenkin.** Phys. Rev. D, **25**, 2569 (1982).

ՍԿԱԼՅԱՐ ՄԱՍՆԻԿՆԵՐԻ ՔՎԱՆՏԱՅԻՆ ՃԱՌԱԳԱՅԹՈՒՄԸ ՇԱՐԺՎՈՂ ՀԱՅԵԼԻՆԵՐՈՎ։ II.

Լ. Շ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ, Ա. Ա. ՍԱՀԱՐՅԱՆ

Դիտարկված են արագացումով շարժվող հայելիների կողմից առաքված սկալյար դաշտի քվանտների համար աշխատանքի առաջին մասում ստացված ընդհանուր բանաձևի կիրառությունները։ Հետազոտված են հարթ հայելու տատանման տարբեր դեպքեր, ներառյալ հայելու մակերևույթին գրգռված ակուստիկ ալիքների դեպքը։

QUANTUM RADIATION OF SCALAR PARTICLES BY MOVING MIRRORS. II.

L. SH. GRIGORIAN, A. A. SAHARIAN

Applications of the general formula derived in our previous paper for the number of scalar field's quanta emitted by accelerated mirrors, are considered. Various cases of the flat mirrors vibrations are investigated incduding the case of acoustic waves excited on the surface of the mirror.