

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТОДИНАМИКИ
И ДВА СЛУЧАЯ ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Г. Л. АРЕШЯН

Государственный инженерный университет Армении

(Поступила в редакцию 21 июня 1996 г.)

Даются основные векторные дифференциальные уравнения электромагнитодинамики, полученные из тензорных уравнений при наличии электрических и магнитных зарядов. Постулируются интегральные выражения векторов-потенциалов. Получены уравнения электромагнитных полей в вакууме и в пространстве, содержащем проводящее электрическое вещество.

1. Основные уравнения

Основные векторные дифференциальные уравнения, которые получаются из тензорных уравнений работы [1] в системе MKS имеют вид:

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad} \varphi_e, \quad \mathbf{H}^* = -\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial t} - \text{grad} \varphi_g, \quad (1)$$

$$\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}, \quad \mathbf{D}^* = \text{rot} \mathbf{K}, \quad \text{div} \mathbf{B} = 0, \quad \text{div} \mathbf{D}^* = 0, \quad (2)$$

$$\text{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \text{rot} \mathbf{H}^* = -\frac{\partial \mathbf{D}^*}{\partial t}, \quad (3)$$

$$\text{rot} \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + cn \text{rot} \mathbf{D}^* - \frac{n}{c} \frac{\partial \mathbf{H}^*}{\partial t} = \mathbf{z}, \quad (4)$$

$$cn \text{rot} \mathbf{B} - \frac{n}{c} \frac{d\mathbf{E}}{dt} + \text{rot} \mathbf{E}^* - \frac{\partial \mathbf{B}^*}{\partial t} = \mathbf{x}, \quad (5)$$

$$\text{div} \mathbf{D} + \frac{n}{c} \text{div} \mathbf{H}^* = \rho_e, \quad \frac{n}{c} \text{div} \mathbf{E} + \text{div} \mathbf{B}^* = \rho_g, \quad (6)$$

$$\mathbf{B} = \mu' \mu_0 \mathbf{H}, \quad \mathbf{D} = \varepsilon' \varepsilon_0 \mathbf{E}, \quad \mathbf{B}^* = \mu'_g \mu_0 \mathbf{H}^*, \quad \mathbf{D}^* = \varepsilon'_g \varepsilon_0 \mathbf{E}^*, \quad (7)$$

$$\mathbf{z} = \sigma \mathbf{E}, \quad \mathbf{x} = \sigma_g \mathbf{H}^*. \quad (8)$$

Сила Лоренца на вещественную частицу, имеющую электрический заряд e и, одновременно, магнитный заряд g , равна

$$\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{E} + e[\mathbf{v}\mathbf{B}] + g\mathbf{H}^* + g[\mathbf{v}\mathbf{D}^*], \quad (9)$$

где $\mathbf{p}$ —импульс, $[\mathbf{a}\mathbf{b}] = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ —векторное произведение,

Плотность энергии электромагнитных полей:

$$w = \frac{1}{2} \left(\mathbf{E} \mathbf{D} + \mathbf{H} \mathbf{B} + \mathbf{E}^* \mathbf{D}^* + \mathbf{H}^* \mathbf{B}^* + \frac{2n}{c} \mathbf{E} \mathbf{H}^* + 2nc \mathbf{B} \mathbf{D}^* \right). \quad (10)$$

Вектор Пойнтинга потока плотности энергии

$$\mathbf{P} = [\mathbf{E} \mathbf{H}] + [\mathbf{H}^* \mathbf{E}^*] + nc [\mathbf{H}^* \mathbf{B}] + nc [\mathbf{H} \mathbf{B}^*]. \quad (11)$$

Связь между w и $\mathbf{P}$:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -(\partial \mathbf{E} + \kappa \mathbf{H}^*) - \operatorname{div} \mathbf{P}. \quad (12)$$

Постоянная взаимодействия [2]

$$n = \frac{\mu_0}{\epsilon_0} \cdot \frac{e_0^4}{(4\pi\hbar)^2} = 5,32501 \cdot 10^{-5}, \quad (13)$$

Наименования и размерности векторов и коэффициентов, использованных в вышеприведенных уравнениях, даются в Приложении.

2. Векторы-потенциалы

Уравнения (4) и (5) для стационарных токов и вакуума примут вид

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} + cn\epsilon_0 \operatorname{rot} \mathbf{E}^* &= \delta, \\ cn\mu_0 \operatorname{rot} \mathbf{H} + \operatorname{rot} \mathbf{E}^* &= \kappa. \end{aligned} \right\}. \quad (14)$$

Решая систему для случая отсутствия магнитных токов ($\kappa=0$), получаем

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\delta}{1-n^2}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E}^* = -\frac{cn\mu_0 \delta}{1-n^2}. \quad (15)$$

В случае отсутствия электрических токов ($\delta=0$) следует

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = -\frac{cn\epsilon_0 \kappa}{1-n^2}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E}^* = \frac{\kappa}{1-n^2}. \quad (16)$$

Умножая уравнения (15) на элемент площади и интегрируя, получаем:

$$\int_S \operatorname{rot} \mathbf{H} d\mathbf{S} = \int_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \frac{1}{1-n^2} \int_S \delta d\mathbf{S} = \frac{I_e}{1-n^2}, \quad (17)$$

$$\int_L \mathbf{E}^* d\mathbf{l} = -\frac{cn\mu_0}{1-n^2} I_e, \quad (18)$$

где $I_e(A)$ — электрический ток, проходящий через поверхность S , натянутую на контур L .

В случае прямого бесконечно длинного провода с током e полу-

чаем из (17) и (18) для напряженностей (после интегрирования по окружности радиуса r вне провода)

$$H_{\varphi} = \frac{1}{2\pi r(1-n^2)} I_e, \quad E_{\varphi}^* = \frac{-cn\mu_0}{2\pi r(1-n^2)} I_e. \quad (19)$$

Аналогично, в случае длинного провода с магнитным током $I_g(B)$ из уравнений (16) находим

$$H_{\varphi} = \frac{-cn\epsilon_0}{2\pi r(1-n^2)} I_g, \quad E_{\varphi}^* = \frac{1}{2\pi r(1-n^2)} I_g. \quad (20)$$

Из уравнений (15) следует, что при генерации электрических и магнитных полей только электрическими токами ($\kappa=0$), с точностью до аддитивной постоянной, имеем

$$E^* = -cn\mu_0 H. \quad (21)$$

А из уравнений (16), только для магнитных токов ($\delta=0$), получаем

$$H = -cn\epsilon_0 E^*. \quad (22)$$

Принимая во внимание полученные выражения (19) и (21), можем постулировать следующие интегральные выражения для векторов-потенциалов (аналоги закона Био-Савара) для электрических токов и их плотностей:

$$A = \frac{\mu_0 I_e}{4\pi(1-n^2)} \int_L \frac{dl}{r}, \quad A = \frac{\mu_0}{4\pi(1-n^2)} \int_v \frac{\partial dv}{r} \quad (23)$$

$$K = \frac{-nI_e}{4\pi(1-n^2)c} \int_L \frac{dl}{r}, \quad K = \frac{-n}{4\pi(1-n^2)c} \int_v \frac{\partial dv}{r}. \quad (24)$$

В случае генерации электрических и магнитных полей магнитными токами и их плотностями (см. уравнения (20) и (22)) постулируем следующие выражения для векторов-потенциалов:

$$A = \frac{-nI_g}{4\pi(1-n^2)c} \int_L \frac{dl}{r}, \quad A = \frac{-n}{4\pi(1-n^2)c} \int_v \frac{\kappa dv}{r}, \quad (25)$$

$$K = \frac{\epsilon_0 I_g}{4\pi(1-n^2)} \int_L \frac{dl}{r}, \quad K = \frac{\epsilon_0}{4\pi(1-n^2)} \int_v \frac{\kappa dv}{r}. \quad (26)$$

В уравнениях (23)÷(26) считается, что точка наблюдения M , для которой определяется вектор-потенциал, находится в вакууме ($\epsilon'=1$, $\mu'=1$ и т. д.), Легко показать, что, используя уравнение (23) для случая бесконечно длинного тонкого провода с током I_e и уравнение $H = \frac{1}{\mu_0} \text{rot} A$ (см. уравнение (2)), получаем то же самое выражение для H_{φ} , что и в уравнении (19)).

3. Электромагнитные волны в вакууме, волновые уравнения

Определяя из двух основных уравнений (3) и (5) $\text{rot}H$ и $\text{rot}E^*$, получаем для вакуума

$$\text{rot}H = \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}, \quad \text{rot}E^* = \mu_0 \frac{\partial H^*}{\partial t}. \quad (27)$$

С учетом уравнений (3) имеем

$$\text{rotrot}H = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 H}{\partial t^2}, \quad \text{rotrot}E^* = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E^*}{\partial t^2}. \quad (28)$$

Уравнения (6) для вакуума ($\rho_e=0$, $\rho_g=0$) дают

$$\text{div}D=0, \quad \text{div}B^*=0. \quad (29)$$

Тогда из уравнений (28) получаем окончательно, учитывая (29):

$$\nabla^2 H = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 H}{\partial t^2}, \quad \nabla^2 E^* = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E^*}{\partial t^2}, \quad (30)$$

где ∇^2 —оператор Лапласа.

Уравнения (30) решаются независимо друг от друга. Векторы E и H^* определяются по уравнениям (3) либо по (27). Связь между электромагнитными полями (E, H) и (E^*, H^*) будет определяться уравнением (21), если они генерированы в источнике электрическими плотностями токов $\mathfrak{J}$ и уравнением (22)—если они генерированы магнитными плотностями токов $\mathfrak{K}$. Вычисляя составляющие плотностей энергий по уравнению (10), получаем матрицу

$$W = W_0 \begin{vmatrix} 1 & -n^2 \\ -n^2 & n^2 \end{vmatrix},$$

где для электромагнитных волн, испущенных антенной с электрическими токами

$$W_0 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \mu_0 H^2,$$

а для электромагнитных волн, испущенных антенной с магнитными токами

$$W_0 = \frac{1}{2} \epsilon_0 (E^*)^2 + \frac{1}{2} \mu_0 (H^*)^2.$$

Составляющие матрицы $W_{12} = -n^2 W_0$ и $W_{21} = -n^2 W_0$ определяют плотности энергий взаимодействия полей (E, H) и (E^*, H^*) .

4. Уравнения электромагнитных полей в проводнике из электрического вещества

Получим уравнения для векторов электромагнитных полей в проводящей электрической среде ($\sigma \neq 0$, $\sigma_g = 0$), свободной от электрических и магнитных зарядов ($\rho_e = 0$, $\rho_g = 0$). Электрическими токами смещения $\partial \mathbf{D} / \partial t$ по сравнению с токами проводимости пренебрегаем ввиду их малости. Магнитные токи смещения $\partial \mathbf{B}^* / \partial t$, несмотря на их малость, будем учитывать для выяснения их влияния.

Так как $\sigma_g = 0$, то всюду $\kappa = 0$, а $\mathbf{D} = \sigma \mathbf{E}$.

Уравнения (4), (5) и (6) при всех этих условиях и записанные для комплексных функций от $\exp(j\omega t)$ имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} + c n \varepsilon_g \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}}^* - j \omega \frac{n}{c} \dot{\mathbf{H}}^* - \sigma \dot{\mathbf{E}} &= 0 \\ c n \mu \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} + \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}}^* - j \omega \mu_g \dot{\mathbf{H}}^* &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} = -j \omega \mu \dot{\mathbf{H}}, \quad \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}^* = -j \omega \varepsilon_g \dot{\mathbf{E}}^*. \quad (32)$$

Беря от уравнений (32) rot , подставляя в (31) и учитывая также, что при $\rho_e = 0$ и $\rho_g = 0$ дивергенции $\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}^*$ равны нулю, получаем

$$\begin{aligned} \nabla^2 \dot{\mathbf{E}} + a_1 \nabla^2 \dot{\mathbf{H}}^* + a_2 \dot{\mathbf{H}}^* - a_3 \dot{\mathbf{E}} &= 0, \\ b_1 \nabla^2 \dot{\mathbf{E}} + \nabla^2 \dot{\mathbf{H}}^* + b_2 \dot{\mathbf{H}}^* &= 0, \end{aligned} \quad (33)$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= c n \mu, \quad a_2 = \frac{n \omega^2 \mu}{c^2}, \quad a_3 = j \sigma \omega \mu, \\ b_1 &= c n \varepsilon_g, \quad b_2 = \omega^2 \varepsilon_g \mu_g. \end{aligned} \quad (34)$$

Решая систему (33), получаем для векторов $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}^*$ следующее уравнение:

$$(c_1 \nabla^4 - c_2 \nabla^2 - c_3) \dot{\mathbf{F}} = 0, \quad (35)$$

где $\dot{\mathbf{F}} = \dot{\mathbf{E}}$ либо $\dot{\mathbf{H}}^*$ и

$$\begin{aligned} c_1 &= 1 - a_1 b_1 = 1 - n^2 c^2 \mu \varepsilon_g, \quad c_2 = a_3 - b_2 - a_2 b_1, \\ c_3 &= j \sigma \omega \mu - \omega^2 \varepsilon_g \mu_g + n^2 \omega^2 \varepsilon_g \mu, \quad c_4 = a_3 b_2 = j \sigma \omega^3 \mu \varepsilon_g \mu_g. \end{aligned} \quad (36)$$

Если пренебречь магнитными токами смещения $\partial \mathbf{B}^* / \partial t = 0$, то в системе (33) необходимо принять $a_2 = 0$, $q_2 = 0$. Тогда получаем вместо (35)

$$((1 - n^2 c^2 \mu \varepsilon_g) \nabla^2 - j \sigma \omega \mu) \dot{\mathbf{F}} = 0 \quad (37)$$

и следующую связь между $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}^*$ с точностью до аддитивной постоянной

$$\dot{\mathbf{H}}^* = -c n \varepsilon_g \dot{\mathbf{E}}. \quad (38)$$

Общеизвестные Максвелловские уравнения для проводящей среды при пренебрежении токами смещения получаются из уравнения (37) при устремлении постоянной взаимодействия $n \rightarrow 0$, что дает

$$(\nabla^2 - j\omega\sigma\mu)\vec{E} = 0.$$

5. Заключение

Представленные основные уравнения электромагнитодинамики являются обобщением уравнений электродинамики Максвелла и инверсно-сопряженных уравнений Иосифьяна [3] и позволяют исследовать стационарные и переменные электромагнитные поля, которые генерированы электрическими и магнитными зарядами и токами.

Полученные интегральные выражения электрического и магнитного векторов-потенциалов, содержащие электрические и магнитные токи (или их плотности), являются аналогами закона Био-Савара для электромагнитодинамики. Причем электрический ток обуславливает как электрический вектор-потенциал A , который отличается от своего аналога множителем $(1-n^2)^{-1}$, так и магнитный вектор-потенциал K .

Исследование распространения электромагнитных полей в вакууме показало, что, хотя волновые уравнения для электромагнитных полей (E, H) решаются независимо от волновых уравнений для полей (E^*, H^*), энергетические характеристики этих полей взаимосвязаны и обусловлены тем, каким током (электрическим либо магнитным) генерированы эти поля в первоисточнике.

Гармонические электромагнитные поля в проводящем электрическом веществе при пренебрежении только электрическими токами смещения описываются дифференциальными уравнениями в частных производных четвертой степени. Степень дифференциальных уравнений понижается до второй, если не учитываются также и магнитные токи смещения. Однако даже и в этом случае уравнения отличаются от известного уравнения электродинамики коэффициентом при операторе ∇^2 , равном $1 - n^2 c^2 \mu \epsilon_g = 1 - n^2 \mu' \epsilon'_g$.

Приложение

$e(A \cdot \text{сек}), g(B \cdot \text{сек}),$ $\rho_e (A \cdot \text{сек} \cdot M^{-3})$ $\rho_g (B \cdot \text{сек} \cdot M^{-3}),$ $E, E^* (B \cdot M^{-1})$ $H, H^* (A \cdot M^{-1})$ $D, D^* (A \cdot \text{сек} \cdot M^{-2})$ $B, B^* (B \cdot \text{сек} \cdot M^{-2})$ $\delta(A \cdot M^{-2}), \kappa(B \cdot M^{-2})$ $\varphi_e(B), \varphi_g(A)$	—электрический и магнитный свободные заряды и их плотности, —векторы электрических напряженностей, —векторы магнитных напряженностей, —векторы электрических индукций, —векторы магнитных индукций, —векторы плотности электрического и магнитного токов проводимости, —скалярные электрический и магнитный потенциалы,
--	---

$A(B \cdot \text{сек} \cdot M^{-1}), K(A \cdot \text{сек} \cdot M^{-1})$

—электрический и магнитный векторы-потенциалы,

$\varepsilon = \varepsilon' \cdot \varepsilon_0, \varepsilon_g = \varepsilon'_g \cdot \varepsilon_0$

—электрические проницаемости электрических и магнитных сред,

$\mu = \mu' \cdot \mu_0, \mu_g = \mu'_g \cdot \mu_0$

—магнитные проницаемости электрических и магнитных сред,

$\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} (A \cdot B^{-1} \cdot \text{сек} \cdot M^{-1}), \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$

—электрическая и магнитная проницаемости вакуума,

$(B \cdot A^{-2} \cdot \text{сек} \cdot M^{-1})$

$\varepsilon', \varepsilon'_g, \mu', \mu'_g$

—относительные безразмерные проницаемости среды,

$c = (\varepsilon_0 \mu_0)^{-1/2} (M \cdot \text{сек}^{-1})$

—скорость света в вакууме,

$\sigma (A \cdot B^{-1} \cdot M^{-1}), \tau_g (B \cdot A^{-1} \cdot M^{-1})$

—электрическая и магнитная проводимости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Л. Арешян. ДАН Арм.ССР, 66, № 1, 222 (1978).
2. Г. Л. Арешян. Изв. НАН Армении, Физика, 30, № 6, 249 (1995).
3. А. Г. Иосифьян. ДАН Арм.ССР, 55, № 2, 98 (1972)

ԷԼԵԿՏՐԱՄԱԳՆԻՏՈՒԴԻՆԱՄԻԿԱՅԻ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԸ ԵՎ ՆՐԱՆՑ ԿԻՐԱՌՄԱՆ ԵՐԿՈՒ ԴԵՊՔԸ

Գ. Լ. ԱՐԵՇՅԱՆ

Տրված են էլեկտրամագնիսամիկայի հիմնական վեկտորական դիֆերենցիալ հավասարումները, ստացված տենզորային հավաքարումներից էլեկտրական և մագնիսական լիցքերի առկայության դեպքում: Պոստուլացվում են վեկտոր-պոտենցիալների ինտեգրալային արտահայտությունները: Ստացված են էլեկտրամագնիսական դաշտերի հավասարումները վակուումում և տարածություն մեջ, որը պարունակում է էլեկտրահաղորդիչ նյութ:

BASIC EQUATIONS OF ELECTROMAGNETODYNAMICS AND TWO CASES OF THEIR APPLICATION

G. L. ARESHIAN

Basic vector differential equations of electromagnetodynamics are given derived from tensor equations in the presence of electric and magnetic charges. The integral expressions for vector-potentials are postulated. Electromagnetic fields' equations are obtained for vacuum and conducting electric matter containing space.