

КВАЗИКЛАССИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ВО ВРЕМЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

М. Л. ТЕР-МИКАЕЛЯН

Институт физических исследований НАН Армении

(Поступила в редакцию 11 декабря 1996 г.)

Развита методика получения квазиклассических волновых функций во временном пространстве для двухуровневой системы, взаимодействующей со световым импульсом. Полученные выражения в пределе монохроматических полей переходят в известные результаты для мгновенного включения взаимодействия и могут применяться при решении различных задач взаимодействия вблизи резонансов с простейшими атомными системами.

Поведение простых атомных систем в поле немонахроматического электромагнитного импульса, распространяющегося вдоль оси x

$$E(t, r) = \mathcal{E}(t, x) e^{ikx - i\omega t} + \text{к.с.}; \quad \mathcal{E} = \mathcal{E}e \quad (1)$$

может быть детально проанализировано вблизи резонанса. Предполагается, что амплитуда поля является медленно меняющейся функцией по сравнению с экспонентой. Для этого мы воспользуемся широко известным в квантовой механике квазиклассическим приближением [1], которое применим для исследования задач не в пространстве x, y, z , а в пространстве времени. Близкая методика применялась в работе [2] для вычисления вероятности адиабатических переходов. Амплитуда поля, входящая в выражение для немонахроматического поля (1) имеет вид

$$\mathcal{E}(x, t) = |\mathcal{E}(x, t)| e^{i\varphi(x, t)}. \quad (2)$$

Решение уравнения Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \Phi}{\partial t} = (\hat{H}_0 - \hat{d}E) \Phi \quad (3)$$

будем искать в виде разложения по полной системе функций невозмущенного атома

$$\Psi_s = U_s e^{iE_s t}, \quad (4)$$

где E_s — энергия, измеряемая в единицах сек^{-1} . Уравнения для коэффициентов разложения a_1 и a_2 искомой волновой функции

$$\Phi = a_1 \Psi_1 + a_2 \Psi_2, \quad (5)$$

для двухуровневой системы в резонансном приближении, т. е. при условии

$$|\Delta| = |E_{21} - \omega| \ll E_{21} \quad (6)$$

можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} i\dot{a}_1 &= W^* a_2, \\ i\dot{a}_2 &= W a_1, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$W = V e^{i\Delta t} = \left| \frac{d\mathcal{E}}{h} \right| e^{i\Delta t + i\varphi + i\varphi_1 - i\varphi_2 + i\pi} = \left| \frac{d\mathcal{E}}{h} \right| e^{i\varphi_0(x,t)}, \quad (8)$$

$$\varphi_0(x,t) = \Delta t + \varphi + \varphi_1 - \varphi_2 + \pi, \quad (9)$$

где φ_1 и φ_2 — случайные фазы волновых функций атома в нижнем и верхнем состояниях, φ — фаза амплитуды поля E , а $d = d_{21} = \int U_2^* e r U_1 dV$.

Из уравнений (7) следует уравнение для a_1 :

$$\ddot{a}_1 - \dot{a}_1 \frac{d}{dt} \ln W^* + |W|^2 a_1 = 0. \quad (10)$$

Уравнение для a_2 получается из (10) при замене W^* на W . Из условия ортонормированности функций $\Phi_{1,2}$ следует условие

$$|a_1|^2 + |a_2|^2 = 1. \quad (11)$$

Будем искать решение уравнения (10) в виде

$$a_1 = e^{\frac{i}{h} S} = e^{\frac{i}{h} (S_0 + \hbar S_1 + \hbar^2 S_2 + \dots)} \quad (12)$$

Подставляя в (10), получим

$$\dot{S}_0 = \pm \hbar |W|, \quad (13)$$

$$\dot{S}_1 = \frac{\dot{\varphi}_0}{2} = \frac{\Delta + \dot{\varphi}}{2}. \quad (14)$$

Общее решение уравнения Шредингера можно представить в следующем виде:

$$\Phi = C_1 e^{i \int_{-\infty}^t \left[|W| - \frac{i}{2} \dot{\varphi}_0(t) \right] dt} (\Psi_1 + e^{i\varphi_0} \Psi_2) + C_2 e^{-i \int_{-\infty}^t \left[|W| + \frac{i}{2} \dot{\varphi}_0(t) \right] dt} (\Psi_1 - e^{i\varphi_0} \Psi_2). \quad (15)$$

Из общего решения выберем две функции $\Phi_{1,2}$, подчиняющиеся начальным условиям $\Phi_1 \Rightarrow \Psi_1$ при $t \rightarrow -\infty$ и $\Phi_2 \Rightarrow \Psi_2$ при $t \rightarrow -\infty$. Ответ можно представить в виде

$$\Phi_1 = e^{-i \frac{\varphi_0}{2}} \Psi_1 \cos \int_{-\infty}^t |W| dt + i e^{i \frac{\varphi_0}{2}} \Psi_2 \sin \int_{-\infty}^t |W| dt, \quad (16)$$

$$\Phi_2 = i e^{-i\frac{\varphi_0}{2}} \Psi_1 \sin \int_{-\infty}^t |W| dt + e^{i\frac{\varphi_0}{2}} \Psi_2 \cos \int_{-\infty}^t |W| dt. \quad (17)$$

Функции (16), (17) в случае мгновенного включения $W(t)$ при $t=t_0$ (при этом нижний предел интегрирования в формулах (15), (16) и (17) нужно заменить на t_0 и считать, что при $t > t_0$, $|W| = \text{const}$ и $\dot{\varphi}_0 = \Delta + \varphi = \text{const}$), переходят в известный результат при $\dot{\varphi} = 0$, рассмотренный в [1, §41]. Однако результат расчета, приведенного в [1], содержит опечатки (что сразу видно из приведенных в [1] выражений для Φ_1 и Φ_2 , которые не подчиняются условию ортонормированности). Правильные выражения для $\Phi_{1,2}$ при $t_0 = 0$ имеют вид:

$$\Phi_1' = \exp\left(-i\frac{\Delta}{2}\right) \left[\cos \frac{\Omega t}{2} + \frac{i\Delta}{\Omega} \sin \frac{\Omega t}{2} \right] \Psi_1 - \exp\left(i\frac{\Delta}{2}\right) \frac{2iV}{\Omega} \sin \frac{\Omega t}{2} \Psi_2, \quad (16')$$

$$\Phi_2' = -\exp\left(-i\frac{\Delta}{2}\right) \frac{2iV^*}{\Omega} \sin \frac{\Omega t}{2} \Psi_1 + \exp\left(i\frac{\Delta}{2}\right) \left[\cos \frac{\Omega t}{2} - \frac{i\Delta}{\Omega} \sin \frac{\Omega t}{2} \right] \Psi_2. \quad (17')$$

Нужно также учесть, что для совпадения результатов (16), (17) с (16'), (17') — результатами для мгновенного включения импульса с постоянной амплитудой и фазой, при $t \geq t_0$ в выражениях (16) и (17) необходимо удерживать поправки порядка S_1 и в предэкспоненциальных коэффициентах. В этом случае при определении Φ_1 необходимо

принять $C_{1,2} = \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{\dot{\varphi}_0(t_0)}{2|W(t_0)|} \right)$; а при нахождении Φ_2 $C_{1,2} = \mp \frac{1}{2} e^{i\varphi_0(t_0)}$

что соответствует учету поправок первого порядка по параметру $\frac{\dot{\varphi}_0}{2|W|}$ в предэкспоненциальных коэффициентах выражения (15) и сво-

дится к замене $C_1 e^{i\varphi_0} \Psi_2$ на $C_1 e^{i\varphi_0} \left[1 - \frac{\dot{\varphi}_0}{2|W|} \right] \Psi_2$ и $C_2 \Psi_2$ на $C_2 \left[1 + \frac{\dot{\varphi}}{2|W|} \right] \Psi_2$.

Легко проверить, что и в этом случае функции (16), (17) ортонормированы. Однако удержание поправки первого порядка в случае, когда $W = W(t)$ и $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}(t)$, не является правомерным, поскольку при этом нормировка волновых функции будет зависеть от времени.

Условие применимости квазиклассики $\hbar S_1 \ll S_0$ сводится к условию

$$\int_{-\infty}^t \frac{\dot{\varphi}_0}{2} dt \ll \int_{-\infty}^t |W| dt. \quad (18)$$

Из выражений (9) и (18) следует, что если импульс действует в интервале $-t_{eff} < t < t_{eff}$, то (16) принимает вид

$$\frac{1}{2} \int_{-t_{eff}}^{t_{eff}} \left(\Delta + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) dt \ll \int_{-t_{eff}}^{t_{eff}} |W| dt. \quad (19)$$

Следовательно, величина $\int_{-t_{eff}}^{t_{eff}} |W| dt$, которая пропорциональна частоте перехода между состояниями $\Phi_{1,2}$, т. е. эффективной частоте Раби, умножения на время действия импульса $2t_{eff} \sim \tau$, должна быть значительно больше суммарного изменения фазы, как за счет фазы амплитуды поля φ , так и за счет расстройки Δ .

Если импульс начинает действовать на атом, который до взаимодействия находился в состоянии $a_1=1, a_2=0$, с момента $-t_{eff}$, то условие (18) нужно рассматривать в интервале времени от $-t_{eff}$ до t заменить нижний предел во всех выражениях на $-t_{eff}$. Тогда для интервала времен от $-t_{eff}$ до t , где будет нарушаться условие (18), квазиклассическое приближение становится неприменимым. Аналогичная ситуация имеет место и при выключении импульса.

Кроме условия (18), необходимо потребовать, чтобы эффекты «накопления» от S_1 за время действия импульса были бы несущественны, т. е.

$$S_1(t) - S_1(-t_{eff}) \ll \pi. \quad (20)$$

Условие (20) накладывает ограничения на условия применимости решений (15), и будет зависеть от конкретных свойств изменения фазы и амплитуды импульса от времени. Например, в случае $\varphi = \text{const}$ условие (20) будет означать, что эффектами «накопления» можно пренебречь, если удовлетворяется условие $\tau \leq \pi/\Delta$, и, поскольку $\Delta \ll \omega$, то функции (17) могут быть использованы для рассмотрения процессов, происходящих за большое число периодов лазерной волны, т. е. для длин, значительно превышающих атомные и даже межатомные расстояния.

В случае, когда осуществляется точный резонанс и амплитуда волны имеет независимую от времени фазу ($\Delta=0, \varphi=\text{const}$), волновые функции (16) и (17) становятся точными решениями уравнений (10) и могут использоваться для любых промежутков времени.

Учет в разложении (12) члена S_2 приводит к дополнительному условию применимости квазиклассического приближения $S_2 \ll S_1$:

$$\int_{-t_{eff}}^t \left[\frac{\dot{\varphi}^2}{4} + i \left| \frac{\dot{\varphi}}{2} \right| \left| \frac{\dot{W}}{W} \right| - i \frac{\ddot{\varphi}}{2} \right] \frac{dt}{|W|} \ll \varphi(t) - \varphi(-t_{eff}). \quad (21)$$

Прямая подстановка квазиклассического решения в уравнения (10) показывает, что решения остаются справедливыми, если при их нахождении можно пренебречь выражением, входящим под интеграл в (21), по сравнению с членами порядка $iW, W\dot{\varphi}$. Кроме условия (19), необходимо также наложить условие $\ddot{\varphi} \ll \dot{W}$.

Полезно сравнить уравнение (10) с уравнением Шредингера, для которого квазиклассический метод решения хорошо разработан [1,3,4]. Для этого введем вместо a_1 переменную b_1 :

$$b_1(t) = a_1(t) e^{\int f(t) dt} = a_1(t) W^*, \quad (22)$$

где

$$f(t) = \frac{d}{dt} \ln W^*. \quad (23)$$

Тогда уравнение (10) примет вид

$$\ddot{b} + b \left(-\frac{\dot{f}}{2} - \frac{f^2}{4} + |W|^2 \right) = 0. \quad (24)$$

Непосредственно применить известные решения, полученные в квантовой механике, к уравнению (24) невозможно и уравнение (24) требует специальных математических исследований в точках поворота.

Функции (16), (17), в частности, при линейной зависимости фазы поля от времени, могут найти применение при рассмотрении различных задач взаимодействия импульсов света с простейшими атомными системами вблизи резонансных переходов. Например, может быть рассмотрена задача о взаимодействии двух разнесенных во времени импульсов с сильно отличающимися амплитудами с двухуровневой системой в резонансных условиях. Можно также применить квазиклассическую методику к трехуровневой системе. Эти вопросы будут обсуждены в последующей публикации.

Пользуюсь случаем выразить благодарность Г. Григорян и Р. Унаняну за обсуждение.

Работа выполнена в рамках темы 96-772, финансируемой из государственных централизованных источников РА.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Квантовая механика. М., Наука, 1974.
2. А. М. Дыхне. ЖЭТФ, 41, 1325 (1961).
3. В. А. Коварский, Н. Ф. Перельман, И. Ш. Авербух, С. А. Баранов, С. С. Тодирешку. Неадиабатические переходы в сильном электромагнитном поле. Кишинев, «Штиинца», 1980.
4. В. А. Коварский, Н. Ф. Перельман, И. Ш. Авербух. Многоквантовые процессы. М., «Энергоатомиздат», 1985.

QUASICLASSICAL APPROXIMATION IN TIME

M. L. TER-MIKAELIAN

The quasiclassical approximation is developed in space of time variable for a two-level system interacting with an optical electromagnetic pulse. For monochromatic optical pulse the results are equivalent to the well-known expressions for the wave functions of two-level systems driven by a monochromatic field with instantaneous switching on. The obtained results for monochromatic cases may be used in solving various problems of resonance interactions.