

УДК 539.12.14

НОВЫЙ ПОДХОД К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПОЛНОГО МОМЕНТА СВОБОДНОЙ ЧАСТИЦЫ

В. А. ДЖРБАШЯН

Ереванский физический институт

(Поступила в редакцию 11 марта 1996 г.)

Предлагается принципиально новый подход к определению полного момента свободной частицы, следующий из изотропности пространства.

В традиционной квантовой механике импульс и момент не имеют одновременно определенных значений, поэтому приходится для свободной частицы вводить два типа состояний: 1) состояния, где частица имеет определенный импульс (собственная функция—экспонента), и момент не имеет определенного значения; 2) состояния, где частица наряду с энергией, имеет определенный момент (собственная функция—шаровые спиноры, в нерелятивистском бесспиновом приближении—шаровая функция), а импульс не имеет определенного значения.

Имея в виду, что в природе нет свободных частиц с неопределенным импульсом (ноль тоже определенное значение), состояния второго типа исключаются. Претерпевает изменение и сама классификация. Свободное пространство не только трансляционно, но и вращательно симметрично. Следовательно, частица в свободном состоянии должна иметь не только определенный импульс, но и определенный момент. Итак, было бы естественно, если бы взамен традиционного оператора полного момента фигурировал другой оператор. Такой оператор, чтобы волновая функция состояния с определенным импульсом была бы собственной функцией также проекции момента на произвольное направление z и его квадрата. Поскольку угловой момент имеет отношение к свойству пространства, то необходимо корректное рассмотрение вращения трехмерной пространственной системы. В указанном рассмотрении вращения пространства учитывается изменение углов не только единичного вектора $\frac{\mathbf{r}}{r}(\theta_r, \varphi_r)$, но и единичного вектора

$$\frac{\mathbf{p}}{p}(\theta_p, \varphi_p).$$

Отсюда, при использовании известной связи операторов вращения и полного момента следует выражение оператора полного углового момента.

При вычислении сечений различных физических процессов для волновой функции свободного электрона используется выражение [1]

$$\psi_{p\mu} = \frac{1}{\sqrt{v}} u_{\mu} \exp[i(\mathbf{p}\mathbf{r} - Et)/\hbar], \quad (1)$$

где биспионер

$$u_{\mu} = N \begin{pmatrix} v_{\mu}(\lambda) \\ w_{\mu}(\lambda) \end{pmatrix}, \quad N = [(1 + 1/\gamma)/2]^{1/2}, \quad \gamma = E/Mc^2,$$

u_{μ} — собственная функция проекции оператора спина:

$$s_z v_{\mu}(\lambda) = \hbar \mu v_{\mu}(\lambda), \quad (2)$$

λ — спинорный индекс, $v_{\mu}(\lambda) = \delta_{\mu\lambda}$,

$$w_{\mu}(\lambda) = \sum_{\lambda'} \frac{2cs(\lambda\lambda')p}{\hbar(E + Mc^2)} v_{\mu}(\lambda'). \quad (3)$$

Записав это соотношение в виде

$$\sum_{\lambda'} \frac{2cs(\lambda\lambda')p}{\hbar(E + Mc^2)} v_{\mu}(\lambda') = \sum_{\sigma} f_{\sigma} v_{\sigma}(\lambda),$$

находим, что

$$f_{\sigma} = \sum_{\lambda''} v_{\sigma}^*(\lambda'') \frac{2cs(\lambda''\lambda')p}{\hbar(E + Mc^2)} v_{\mu}(\lambda'),$$

т. е. для (3) имеем также выражение

$$w_{\mu}(\lambda) = \sum_{\sigma} \frac{2c(sp)_{\sigma\mu}}{\hbar(E + Mc^2)} v_{\sigma}(\lambda), \quad (4)$$

где

$$(s)_{\sigma\mu} = \sum_{\lambda''} v_{\sigma}^*(\lambda'') s(\lambda''\lambda') v_{\mu}(\lambda'). \quad (5)$$

В свободном состоянии, описываемом плоской волной (1), электрон имеет определенный импульс, а все его положения равновероятны ($|\psi|^2$ не зависит от $\mathbf{r}$), т. е. $\Delta \mathbf{p} = 0$, $\Delta \mathbf{r} = \infty$ и соотношение неопределенностей Гейзенберга не нарушается.

Волновая функция (1) зависит от спинора и скалярных произведений $(\mathbf{p}\mathbf{r})$ и $s\mathbf{p}$ трех векторов. В координатной системе $x y z$ можно отложить компоненты единичных векторов $\frac{\mathbf{r}}{r} \frac{\mathbf{p}}{p}$ (см. рисунок):

$$\frac{\mathbf{r}}{r} \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \right) \equiv (\sin\theta, \cos\varphi, \sin\varphi, \cos\theta), \quad (6)$$

$$\frac{\mathbf{p}}{p} \left(\frac{p_x}{p}, \frac{p_y}{p}, \frac{p_z}{p} \right) \equiv \frac{\mathbf{p}}{p} (\sin\theta_p \cos\varphi_p, \sin\theta_p, \cos\theta_p). \quad (7)$$

В новой системе координат, полученной от исходной поворотом на угол $-\varphi$ вокруг оси z , будем иметь

$$\frac{\mathbf{r}}{r} \left(\frac{x'}{r}, \frac{y'}{r}, \frac{z}{r} \right) \equiv \frac{\mathbf{r}}{r} (\sin\theta, \cos(\varphi_r + \varphi), \sin\theta, \sin(\varphi_r + \varphi), \cos\theta_r), \quad (8)$$

$$\frac{p}{p} \left(\frac{p'_x}{p}, \frac{p'_y}{p}, \frac{p'_z}{p} \right) \equiv \frac{p}{p} (\sin \theta_p \cos(\varphi_p + \varphi), \sin \theta_p \sin(\varphi_p + \varphi), \cos \theta_p). \quad (9)$$

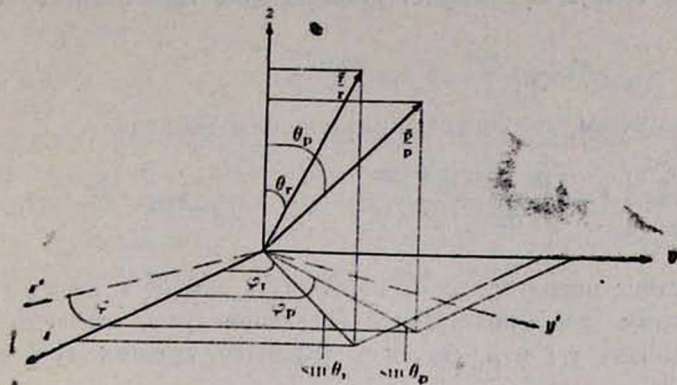


Рис. 1. Компоненты $\frac{r}{r}$ и $\frac{p}{p}$ для исходной и повернутой систем координат (чтобы избежать усложнений, $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, $\frac{z}{r}$, $\frac{p_x}{p}$, $\frac{p_y}{p}$, $\frac{p_z}{p}$ начерчены, но не обозначены).

От декартовых компонентов удобно перейти к циклическим компонентам

$$r_{\pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (x \pm iy) = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} r \sin \theta_r e^{\pm i \varphi_r}, \quad r_0 = z, \quad (10)$$

$$p_{\pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (p_x \pm i p_y) = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} p \sin \theta_p e^{\pm i \varphi_p}, \quad p_0 = p_z. \quad (11)$$

Тогда в новой системе координат циклические компоненты согласно (8—11)

$$r'_{\pm 1} = e^{\pm i \varphi} r_{\pm 1}, \quad r'_0 = r_0, \quad (12)$$

$$p'_{\pm 1} = e^{\pm i \varphi} p_{\pm 1}, \quad p'_0 = p_0. \quad (13)$$

По этому же закону преобразуются и компоненты другого вектора-спина

$$s'_{\pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (s'_x \pm i s'_y) = e^{\pm i \varphi} s_{\pm 1}, \quad s'_0 = s_0, \quad (14)$$

где

$$s_{\pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (s_x \pm i s_y), \quad s_0 = s_z. \quad (15)$$

Для определения оператора углового момента J можно использовать выражение оператора вращения на угол α вокруг направления n [2]:

$$\hat{R} = e^{i\pi J / \hbar} \quad (16)$$

Нетрудно видеть, что искомым оператором $\hat{R}$ в рассматриваемом случае поворота вокруг оси z будет произведение трех операторов:

$$\hat{R}_z = e^{\tau \frac{\partial}{\partial \varphi_r}} e^{\tau \frac{\partial}{\partial \varphi_p}} e^{\tau (i/\hbar) \hat{S}_z} \quad (17)$$

С этой целью учтем, что согласно разложению Тейлора

$$f(x+a) = \left[1 + \frac{a}{1!} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{a^2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \dots \right] f(x) = e^{a \frac{\partial}{\partial x}} f(x), \quad (18)$$

т. е. воздействие оператора $e^{a \frac{\partial}{\partial x}}$ приводит к замене x на $x+a$. Следовательно, первые два множителя в (17) приведут к требуемому изменению компонентов r и p , согласно (8) и (9), сдвигая φ_r и φ_p на φ .

Чтобы убедиться в необходимости третьего множителя в (17), примем во внимание, что из соотношений коммутации декартовых компонентов спина

$$[S_x, S_x] = i\hbar S_y, \quad [S_x, S_y] = -i\hbar S_x \quad (19)$$

следуют соотношения коммутации для циклических компонентов

$$[S_0, S_q] = \hbar q S_q, \quad \text{т.е.} \quad S_x, S_q = S_q(S_x + \hbar q), \quad (q=0, \pm 1). \quad (20)$$

Следовательно, при коммутации с $S_q S_z$ заменится на $S_z + \hbar q$:

$$e^{\tau (i/\hbar) S_z} S_q = S_q e^{\tau (i/\hbar) (S_z + \hbar q)} = e^{i q \tau} S_q e^{\tau (i/\hbar) S_z}. \quad (21)$$

Отсюда вытекает, что воздействие $e^{\tau (i/\hbar) S_z}$ приводит к требуемому согласно (14) и (15) изменению компонентов спина.

Представим оператор (17) в форме (16):

$$\hat{R}_z = e^{i\varphi \hat{J}_z / \hbar}, \quad (22)$$

выражая через оператор проекции полного момента $\hat{J}_z$.

Таким образом, согласно (16) и (17), проекция углового момента

$$\hat{J}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi_r} - i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi_p} + \hat{S}_z. \quad (23)$$

Если учесть, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varphi_r} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \varphi_r} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \varphi_r} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \varphi_r} = -r \sin \theta \sin \varphi_r \frac{\partial}{\partial x} + \\ &+ r \sin \theta \cos \varphi_r \frac{\partial}{\partial y} = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} = [\mathbf{r} \nabla, \mathbf{r}]_z. \end{aligned} \quad (24)$$

т. е.

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi_r} = -i\hbar [r\nabla_r]_z = [\hat{r}\hat{p}]_z, \quad (25)$$

то получим, что оператор полного момента, z -компонент которого мы нашли, имеет вид [3—5]

$$\hat{J} = \hat{L}' + \hat{L}'' + \hat{s}, \quad \text{где } \hat{L}' = -i\hbar [r\nabla_r]_z, \quad \hat{L}'' = -i\hbar [p\nabla_p]_z. \quad (26)$$

В операторах орбитальных моментов $\hat{L}'$ и $\hat{L}''$ изменение углов $\theta_r, \varphi_r, \theta_p, \varphi_p$, определяющих направления радиуса-вектора и импульса, связано с вращением трехмерной пространственной системы координат.

Автор признателен Л. А. Геворгяну, Р. П. Григоряну, Э. В. Сех-посяну, С. С. Элбакяну за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий. Квантовая электродинамика. М., Наука, 1969.
2. М. Роуз. Поля мультиполей. М., ИЛ, 1957.
3. В. А. Джрбашян. ДАН СССР. 254, 1116 (1980).
4. В. А. Джрбашян. ДАН АрмССР, 80, 123 (1985).
5. В. А. Джрбашян. Сохранение полного момента при атомных и ядерных переходах. Ереван. Айастан, 1989.

ՆՈՐ ՄՈՏԵՑՈՒՄ ԱԶԱՏ ՄԱՍՆԻԿԻ ԼՐԻՎ ՄՈՄԵՆՏԻ ՍԱՀՄԱՆՄԱՆԸ

Վ. Ա. ԶՐԲԱՇԻԱՆ

Առաջարկվում է սկզբունքորեն նոր մոտեցում ազատ մասնիկի տարածության իզոտրոպության հետևող լրիվ մոմենտի սահմանմանը:

NEW APPROACH TO DEFINITION OF THE FREE PARTICLE TOTAL ANGULAR MOMENTUM

V. A. DJRBASHIAN

A basically new approach is suggested to define the free particle total angular momentum. This approach follows from the isotropy of space.