

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ТЕМПЕРАТУРЫ В АНИЗОТРОПНОМ
ТВЕРДОМ ТЕЛЕ И КЛЕТОЧНЫХ АВТОМАТАХ

Л.Ш.ГРИГОРЯН, Г.Ф.ХАЧАТРЯН, Х.В.КОТАНДЖЯН

Институт прикладных проблем физики НАН Армении

(Поступила в редакцию 1 сентября 1994 г.)

Методами теории клеточных автоматов рассчитано стационарное распределение температуры в длинной полой проволоке из анизотропного вещества. Температуры сред вне проволоки и внутри полости считаются фиксированными.

1. Введение

Введенные фон Нейманом [1] клеточные автоматы (КА) применяются для моделирования различных процессов и систем в вычислительной технике, биологии, физике (рост кристаллов, динамика жидкостей, солитоны) и других областях естествознания [2,3]. В предлагаемой работе КА используются для определения температуры в полой анизотропном твердом теле.

k -мерный КА определяется четверкой величин (k, S, N, F) . Клетки распределяются в k -мерном множестве Z^k целых чисел $Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ и отождествляются с его элементами $I \in Z^k$. Каждая клетка находится в состоянии $x(I) \in S$ (множество состояний), а ее окрестность $N = \{I + I_1, I + I_2, \dots, I + I_n\}$ определяется набором $\Delta N = \{I_1, I_2, \dots, I_n\}$ относительных координат $I_j \in Z^k$; $j = 1, 2, \dots, n$. Локальная функция перехода F определяет состояние каждой клетки I в момент времени $t + \Delta t$: $x(t + \Delta t, I)$, в зависимости от состояния соседних клеток в момент времени t :

$$x(t + \Delta t, I) = F[x(t, I + I_1); x(t, I + I_2); \dots x(t, I + I_n)] \quad (1)$$

Множество состояний всех клеток называют конфигурацией $c = \{x(I), I \in Z^k\}$ КА. Вводят также глобальную функцию G_F ,

отображающую множество конфигураций само в себя. По определению

$$G_F(c_1) = c_2 \quad (2)$$

тогда и только тогда, когда

$$x_2(I) = F[(x_1(I+I_1); x_1(I+I_2); \dots; x_1(I+I_n))] \quad (3)$$

для всех $I \in Z^k$. Функция G_F описывает динамику КА: КА движется от конфигурации c в момент времени t к конфигурации $G_F(c)$ в момент времени $t + \Delta t$. Последовательность $c, G_F(c), G_F^2(c)$ называют орбитой c .

КА — простые динамические системы с удивительным многообразием проявлений [3]. Будучи дискретными системами они приспособлены к точному моделированию на компьютере.

Теперь перейдем к рассмотрению полого тела (шар, цилиндр, полая проволока и т.д.) из анизотропного вещества с заданными температурами сред за его пределами и внутри полости. Будем предполагать, что плотность потока тепла определяется выражениями

$$q = \sum_{i=1}^3 q_i e_i, \quad q_i = -\lambda_i \frac{\partial T}{\partial x_i}, \quad (4)$$

где T — температура, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — заданные коэффициенты теплопроводности, а e_i — орты декартовой системы координат, ориентированные вдоль осей симметрии анизотропного вещества: $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$. В случае $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ (4) переходит в закон Фурье [4,5] для плотности потока тепла в изотропном веществе. В соответствии с (4) уравнение, описывающее процесс распространения теплоты, имеет вид:

$$\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda_i \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + Q, \quad (5)$$

где ρ — плотность, c_v — теплоемкость вещества, а $Q(t, r)$ — заданная плотность источника тепла.

Тело и прилегающие к нему области разобьем на 3-хмерные клетки, ребра которых параллельны осям симметрии анизотропного вещества. Совместив начало системы координат с центром одной из клеток, координаты клеток (точнее, их центров) представим в виде $m_1 l_1, m_2 l_2, m_3 l_3$, где $(m_1, m_2, m_3) = I \in Z^3$. Размеры клеток l_1, l_2, l_3 выберем

настолько малыми, чтобы можно было пренебречь изменением температуры в их объеме. Введем 3-хмерный КА $(3, T, N, F)$, в котором состояние клетки отождествляется с ее температурой T , а ее окрестностью считается множество прилегающих к ее граням соседних клеток вместе с самой этой клеткой:

$$\begin{array}{lll} I_1 = (-1, 0, 0) & I_2 = (1, 0, 0) & I_3 = (0, -1, 0) \\ I_4 = (0, 1, 0) & I_5 = (0, 0, -1) & I_6 = (0, 0, 1) \end{array} \quad I_7 = (0, 0, 0). \quad (6)$$

Локальную функцию перехода определим в виде

$$F(x_1, x_2, \dots, x_7) = x_7 + \frac{\Delta t}{\rho c_v} \Delta F(x_1, x_2, \dots, x_7), \quad (7)$$

где

$$\Delta F = \begin{cases} Q = \sum_{i=1}^6 \alpha_{\mu} (x_i - x_7) \lambda_{\mu} / l_{\mu}^2, & \text{если } I \in V \\ 0, & \text{если } I \notin V \end{cases} \quad (8)$$

множество клеток, расположенных в веществе:

$$\alpha_{\mu}^{-1} = \begin{cases} 1, & \text{если } I + I_i \in V \\ 1/2 + \lambda_{\mu} / a l_{\mu}, & \text{если } I + I_i \notin V \end{cases} \quad (9)$$

a -коэффициент теплоотдачи тела (считаем скалярной величиной) и, наконец, индекс

$$\mu = \mu(i) = \begin{cases} \text{при } i = 1, 2 \\ \text{при } i = 3, 4 \\ \text{при } i = 5, 6. \end{cases} \quad (10)$$

Необходимо задать также: состояние клеток, прилегающих к телу:

$\{T(t, I); I \in Z^3/V\}$, плотность источников тепла: $\{Q(t, I); I \in V\}$, а также начальные состояния клеток в веществе: $\{T(t_0, I); I \in V\}$. При подходящем выборе параметров $\Delta t, l_1, l_2, l_3$

$$\frac{Q \Delta t}{\rho c_v T} \ll 1, \quad F_0 \ll \frac{1}{6}, \quad (11)$$

конфигурация КА $c(t) = \{T(t, I); I \in Z^3\}$ со временем будет изменяться плавным образом, а функция $T(t, I)$ будет аппроксимировать соответствующее решение уравнения (5). В (11)

$$F_o = \frac{1}{3} \left(\frac{\lambda_1}{l_1} + \frac{\lambda_2}{l_2} + \frac{\lambda_3}{l_3} \right) \frac{\Delta t}{\rho c_v} \quad (12)$$

– безразмерный параметр, описывающий нестационарную задачу теплопроводности (число Фурье). В случае, когда последовательность элементов орбиты $c_o = \{T(t_o, I); I \in Z^3\}$ стремится к определенному пределу

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_F^n(c_o) = c_s = \{T_s(I); I \in Z^3\}, \quad (13)$$

КА со временем будет стремиться к стационарному режиму, соответствующему распределению температуры T_s в веществе.

2. Результаты численных расчетов

В процессе работы КА "перебирает" элементы орбиты: $c_o, D_F(c_o), D_F^2(c_o), \dots$ Их можно аппроксимировать плавной кривой

$$c(t) = \{T(t, I); I \in Z^3\}. \quad (14)$$

В свою очередь, $T(t, I)$ можно аппроксимировать гладкой гиперповерхностью $T(t, r)$, которая будет являться решением уравнения (5), если выполнены условия (11).

Численные расчеты проводились для двумерной задачи: модель бесконечно длинного (вдоль оси $x_3 = z$) полого тела (полая проволока). В этом случае решения (5) зависят от λ_1 и λ_2 и двух пространственных координат $x_1 = x$ и $x_2 = y$. Сечение внешней поверхности проволоки плоскости $z = \text{const}$ было выбрано в виде эллипса, повернутого на угол φ_2 (по отношению к осям симметрии вещества проволоки), а внутренней поверхности – в виде смещенного $(x_o, y_o$ – координаты вектора смещения) и повернутого на угол φ_1 эллипса меньших размеров (рис.1). Температуры сред внутри полости и вне проволоки считались постоянными ($T_1^{(o)}$ и $T_2^{(o)}$ соответственно). На рис.1 приведены результаты расчетов при

$$\begin{aligned} Q &= 0; \quad \rho c_v / \lambda_1 = 2100; \quad \lambda_2 / \lambda_1 = 10; \quad a / \lambda_1 = 100; \\ \varphi_2 &= 165^\circ; \quad r_2 = 2,4; \quad e_2 = 0,65; \quad x_o = -0,5; \\ y_o &= -0,4; \quad \varphi_1 = 108^\circ; \quad r_1 = 1,2; \quad e_1 = 0,90, \end{aligned} \quad (15)$$

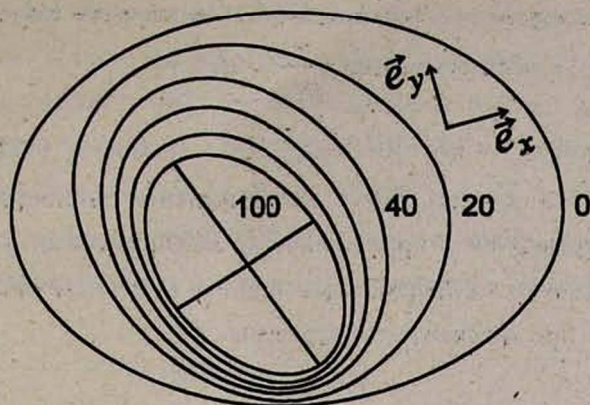


Рис.1. Распределение температуры в длинной полый проволоке из анизотропного вещества (оси симметрии указаны векторами $\vec{e}_x$ и $\vec{e}_y$). Рядом с кривыми (изотермы) указаны соответствующие значения температуры. Внутри полости и вне проволоки температуры сред равны $T_1^{(o)} = 100$ и $T_2^{(o)} = 0^\circ \text{C}$ соответственно.

где r_i , e_i — большая полуось и эксцентриситет внешнего ($i=2$) и внутреннего ($i=1$) эллипсов (единицы СГС). В частном случае полого цилиндра из изотропного вещества

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda, \quad e_1 = e_2 = x_0 = y_0 = 0, \quad T_1^{(o)} > T_2^{(o)} \quad (16)$$

температура определяется формулой [4,6]

$$T = T_1 - \frac{q'}{2\pi\lambda} \ln \frac{r}{r_1}, \quad T_1 = T_1^{(o)} - \frac{q'}{2\pi\lambda r_1}, \quad (17)$$

где r — расстояние от оси цилиндра, $r_1 \leq r \leq r_2$,

$$q' = 2\pi\lambda \frac{T_1 - T_2}{\ln(r_2/r_1)} = \frac{2\pi(T_1^{(o)} - T_2^{(o)})}{\frac{1}{\alpha r_1} + \frac{1}{\lambda} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{\alpha r_2}} \quad (18)$$

— тепловой поток через единицу длины поверхности цилиндра за единицу времени, а T_1 и T_2 — температуры на внутренней и внешней поверхности цилиндра. Данные (17) и результаты наших расчетов (в случае (16)) совпадают с относительной точностью порядка 0,3%.

Коэффициенты теплопроводности большинства материалов зависят от температуры: $\lambda_i = \lambda_i(T)$. Это обстоятельство может заметно влиять на тепловые потоки и распределение температуры в веществе.

Рис.2 иллюстрирует это обстоятельство на примере полого цилиндра из кварца (SiO_2) в предположении $\frac{a}{\rho c_v} \approx 0,05$ и

$$\lambda(T) = 5,9T^2 - 3,77 \cdot 10^3 T + 1,13 \cdot 10^6 \quad \text{при} \quad 0 \leq T \leq 300^\circ \text{C} \quad (19)$$

(аппроксимация данных [7] о коэффициенте теплопроводности вдоль третьего направления в кристаллическом кварце). Как видим, отличие в результатах расчетов с переменным (кривая 1) и постоянным (кривая 2) λ порядка 10% при градиенте температуры

$$\frac{T_1^{(o)} - T_2^{(o)}}{r_2 - r_1} = 250. \quad (20)$$

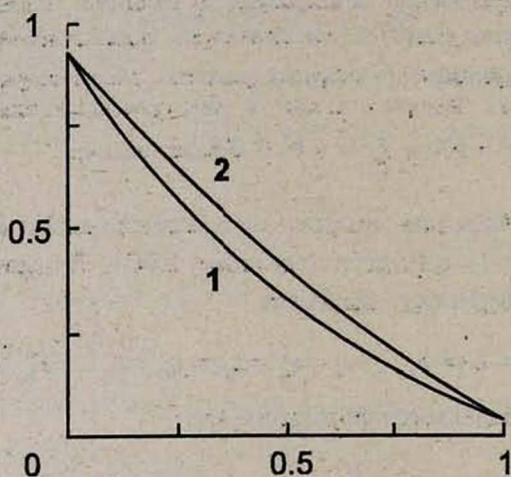


Рис.2. Зависимость безразмерной температуры $(T - T_2) / (T_1 - T_2)$ от безразмерного расстояния $(r - r_1) / (r_2 - r_1)$ до оси полого цилиндра из кварца (SiO_2). 1-кривая, учитывающая зависимость коэффициента теплопроводности λ от температуры T (см.(19)). 2-результаты расчетов по формуле (17) с постоянным λ , равным значению $\lambda(T)$ при $T = (T_1^{(o)} + T_2^{(o)}) / 2$; $T_1^{(o)} = 300$ и $T_2^{(o)} = 0^\circ \text{C}$, r_1 и r_2 - внутренний и внешний радиусы цилиндра.

КА можно пользоваться в случае теплоизолированной поверхности тела, конвективного отвода тепла с поверхности тела, анизотропного вещества с произвольной группой симметрии и т. д.

В конечном счете метод КА эквивалентен разностным методам численного решения уравнения теплопроводности. Например, в случае

изотропного вещества он совпадает с одним из традиционных методов, изложенным в [4] (явный метод). Наряду с этим, методы теории КА наглядны и очень эффективны. Их использование может существенно упростить решение уравнения теплопроводности в случае сложной топологии твердого тела и в ряде других случаев.

Авторы признательны проф. А.Р.Мкртчяну и проф. Л.Шимански-Гайеру за ценные обсуждения и критические замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дж. Фон Нейман. Теория самовоспроизводящихся автоматов. М., Мир, 1971.
2. T.Toffoli. Physika, 10, 117, (1984).
3. T.Toffoli, N.Margolus. Cellular Automata Machines. A New Environment for Modeling, Cambridge, The MIT Press, 1987.
4. Ф.Крейт, У. Блэк. Основы теплопередачи. М., Мир, 1983.
5. Дж. Блейкмор. Физика твердого тела. М., Мир, 1988.
6. Б.М.Яворский, А.А.Детлаф. Справочник по физике. М., Наука, 1968.
7. Акустические кристаллы. Справочник. Под ред. М.П. Шаскольской, М., Наука, 1982.

ON THE DISTRIBUTION OF TEMPERATURE IN INHOMOGENEOUS SOLID AND CELLULAR AUTOMATA

L.SH.GRIGORIAN, H.F.KHACHATRIAN, KH.V.KOTANGIAN

Stationary distribution of the temperature in the infinite hollow wire made of anisotropic matter is calculated by means of the theory of cellular automata. Temperatures of media outside the wire and inside the cavity are assumed to be constant.

ԱՆԻՋՈՏՐՈՊ ՊԻՆԴ ՄԱՐՄԵՆՈՒՄ ՋԵՐՄԱՍՏԻՃԱՆԻ ԲԱԾԽՄԱՆ ԵՎ
ԲԶՋԱԹԻՆ ԱՎՏՈՄԱՏՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Լ.Շ.ԳՐԻԳՈՐԻԱՆ, Հ.Ֆ.ԽԱՉԱՏՐԻԱՆ, Խ.Վ.ԿՈՏԱՆԶԻԱՆ

Բջջային ավտոմատների տեսության մեթոդներով հաշվարկված է ջերմաստիճանի ստացիոնար բաշխումը անհոմոգեն միջավայրում պատրաստված, երկար, սնամեջ լարում: Միջավայրի ջերմաստիճանը լարից դուրս և խոռոչի ներսում համարվում է փիքսված: