ПОДХОД УРАВНЕНИЯ ИНВАРИАНТОВ В ТЕОРИИ
ДВУХУРОВНЕВЫХ СИСТЕМ

А. М. ИШХАНИЯН

Инженерный центр НАН Армении

(Поступила в редакцию 11 января 1996 г.)

В общей постановке рассмотрена проблема интегрируемости в аналитическом виде двухуровневой задачи. Показано, что каждое решение уравнения инвариантов порождает бесконечный класс интегрируемых случаев. Обобщением замены независимой переменной на комплекснозначный случай найдены интегрируемые модели.

Полуклассическая двухуровневая задача в общей постановке, когда амплитуда $U(t)$ и частота $\omega(t)$ внешнего квазирезонансного поля являются медленно меняющимися функциями времени, эквивалентна одному дифференциальному уравнению второго порядка [1—6]:

$$a_{1tt} + (i\delta_t - U_t/U)a_{1t} + (U^2/\hbar^2)a_1 = 0, \quad (1)$$

где $\delta(t)$ — расстройка резонанса, a_1 — амплитуда населенности нижнего уровня, а буквенный индекс означает дифференцирование. Изучению модельных систем, чье поведение в той или иной степени описывается данным уравнением, посвящена обширная литература (см., например, [1—8] и ссылки, приведенные в этих работах).

Важную роль в выяснении качественных особенностей различных явлений, происходящих при взаимодействии излучения с веществом сыграли точные аналитические решения (1), полученные для определенных модельных функций U и δ [1—7]. Несмотря на большое разнообразие конкретных методов, примененных при получении данных решений, общим для всех является редукция исходного уравнения к некоторому хорошо изученному уравнению, имеющему (известное) аналитическое решение:

$$u_{zz} + f(z)u_z + g(z)u = 0 \quad (2)$$

преобразованием независимой и зависимой переменных по стандартной схеме:

$$a_1 = u(z)/\varphi(z), \quad z = z(t). \quad (3)$$

Именно таким путем были впервые получены все известные в настоящий момент интегрируемые случаи. Заметим, что предпринятые в последнее время попытки получить новые решения применением нетрадиционных подходов (как, например, алгебра Ли [8]) пока не принесли новых результатов: получаются все те же известные случаи.

Несмотря на внешнюю простоту традиционной схемы (3), тем не менее, ее возможности еще до конца не исчерпаны: оказывается возможным получить целый ряд новых интегрируемых случаев двухуровневой задачи обобщением замены независимой переменной на комплекснозначный случай, так как редукция уравнения (1) преобразованием (3), как будет показано ниже, обладает некоторым важным групповым свойством, позволяющим генерировать новые интегрируемые случаи из уже известных.

Замена независимой переменной преобразует (2) к виду

$$u_{tt} + (fz_t - z_{tt}/z_t)u_t + gz^2u = 0. \quad (4)$$

Если не вводить преобразования зависимой переменной, то есть положить $\varphi \equiv 1 \Leftrightarrow a_1 = u$, то, приравняв коэффициенты уравнений (1) и (4), получим следующую систему:

$$\begin{aligned} \alpha &= fz_t - z_{tt}/z_t, \\ \beta &= gz^2, \end{aligned} \quad (5)$$

где через α и β обозначены коэффициенты исходного уравнения (1).

Заметим, что здесь α представляет собой комплекснозначную функцию. Нетрудно видеть, что вследствие этого система (5) может быть удовлетворена, вообще говоря, если z является комплекснозначной функцией (от действительного аргумента t). Очевидно, комплекснозначность замены переменной не противоречит никаким физическим требованиям, так как единственным существенным требованием в данном случае является только требование о взаимной однозначности преобразования t в z . Несмотря на это, до сих пор в литературе рассматривалась лишь действительная замена переменной. Мы же будем считать, что $z(t)$ задает взаимнооднозначное преобразование действительной переменной t в комплекснозначную z (на комплексной z -плоскости подобное преобразование должно описать самонепересекающуюся кривую). Как будет показано ниже, обобщение на комплекснозначный случай является существенным шагом, поскольку в данном случае вместо одной вводятся две свободные действительные функции—действительная и мнимая части $z(t)$.

Поскольку при заданных f и g система (5) представляет собой два соотношения, связывающие три (комплекснозначные) функции (α , β , z), то одна из этих трех функций может быть выбрана произвольно. Это существенное обстоятельство, справедливое для произвольных линейных дифференциальных уравнений второго порядка, впервые было отмечено в работе [9] при рассмотрении общей проблемы интегрируемости в аналитическом виде дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами. Таким образом, множество случаев, когда уравнение (1) может быть сведено к уравнению (2) (множество пар $\alpha, \beta \Leftrightarrow U, \delta$, определяемое соотношениями (5)) составляет бесконечный класс.

Хорошо известными примерами подобных классов являются семейства Бамбини-Бермана [3] (обобщение частного решения Розена-Зинера [1], случай с постоянной расстройкой) и Хью-Кэрролла [5] (включающее решение Аллена-Эберли [2], случай с переменной расстройкой).

Рассмотрим теперь общее преобразование (3), включающее преобразование зависимой переменной. Как мы покажем ниже с помощью уравнения инвариантов, в этом случае имеется некий аналог указанного группового свойства. Более того, удастся сформулировать данное свойство в более простом и удобном для приложений виде.

Как известно из теории обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (см. [10]), решения двух линейных уравнений связаны между собой первым соотношением (3) тогда и только тогда, когда инварианты этих уравнений, (1) и (4), равны:

$$\begin{aligned}
 U^2/h^2 - \frac{1}{2}(i\delta_t - U_t/U)_t - \frac{1}{4}(i\delta_t - U_t/U)^2 = \\
 = g z_t^2 - \frac{1}{2}(f z_t - z_{tt}/z_t) - \frac{1}{4}(f z_t - z_{tt}/z_t)^2.
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

При выбранном виде уравнения (2), то есть при заданных $f(z)$ и $g(z)$, решения уравнения инвариантов (6)—пары функций $U(t)$, $\delta(t)$ —задают случаи сводимости исходного уравнения (1) к аналитически интегрируемому уравнению (2). Для классификации всевозможных аналитически интегрируемых случаев двухуровневой задачи важное значение имеет следующее свойство уравнения (6), которое нетрудно проверить непосредственно.

Если функции $U^*(z)$ и δ_z^* являются решениями (6) при $z \equiv t$, то функции

$$U(t) = U^*(z) \frac{dz}{dt}, \quad \delta_t(t) = \delta_z^*(z) \frac{dz}{dt}
 \tag{7}$$

являются решениями уравнения (6) для произвольной $z(t)$.

Таким образом, каждое решение уравнения инвариантов при $z \equiv t$ (назовем такое решение базисным) порождает бесконечный класс функций U и δ_t , для которых двухуровневая задача имеет аналитическое решение.

Примечательно, что базисные функции $U^*(z)$ и $\delta_z^*(z)$, благодаря комплекснозначности $z(t)$, могут быть комплексными. Действительно, т. к. аргументом решения уравнения (2) может быть и комплексная величина z , то можно сконструировать действительные U и δ_t на основе комплексных U^* и δ_z^* , применив комплекснозначную замену $z = x(t) + iy(t)$.

Продемонстрируем практическую значимость сформулированного свойства (7) построением новых решений из известных.

Как показано в работе [7], уравнение инвариантов для случая гипергеометрического уравнения имеет, в числе других, следующие базисные решения:

$$U^*/U_0^* = \frac{1}{\sqrt{z(1-z)}}, \quad \frac{1}{z(1-z)}, \quad (8)$$

$$\delta_z^* = \frac{\delta_1}{z} + \frac{\delta_2}{1-z},$$

где δ_1, δ_2 и U_0^* — произвольные (комплексные) числа.

Пусть расстройка постоянна: $\delta = \lambda t$. Подстановка первой функции (8) в (7) при действительных $z(t)$ дает известное решение Бамбини-Бермана [3]. Простой же выбор z в виде $z = (y(t) + i)/(2i)$ порождает новый класс:

$$U = \frac{U_0}{\sqrt{1+y^2}} \frac{dy}{dt}, \quad e^t = (1+y^2)^{\lambda} e^{\lambda \arctg(y)}, \quad \varphi = 1. \quad (9)$$

Аналогично, вторая функция (8), при выборе $z(t)$ в том же виде $(y(t) + i)/(2i)$, соответствует классу Кэрролла-Хью [6], в то время как действительные $z(t)$ порождают новое семейство:

$$U = \frac{U_0}{z(1-z)} \frac{dz}{dt}, \quad e^t = \frac{z^{\lambda}}{(1-z)^{\lambda+1}}. \quad (10)$$

Таким образом, подход уравнения инвариантов является чрезвычайно плодотворным при поиске новых классов аналитически интегрируемых случаев двухуровневой задачи. При данном подходе поиск аналитически интегрируемых случаев двухуровневой задачи проводится в два этапа. Сначала находятся базисные решения уравнения инвариантов (6) (последнее автоматически учитывает замену зависимой переменной). Далее, основываясь на групповом свойстве (7), определяются те виды замены независимой переменной $z(t)$, которые задают действительные огибающие U и функции расстроек δ . При этом обобщение замены независимой переменной на комплекснозначный случай позволяет принимать в расчет все, в том числе и комплексные, базисные решения уравнения инвариантов, что значительно расширяет круг поиска. Кроме того, становится возможным классифицировать всевозможные аналитически интегрируемые случаи двухуровневой задачи по соответствующим базисным решениям уравнения инвариантов.

В заключение отметим, что, являясь систематическим методом, подход уравнения инвариантов может быть применен и в других структурно аналогичных задачах, например, в трех- или N -уровневой задачах.

1. N. Rosen and C. Zener. Phys. Rev., 40, 502 (1932).
2. L. Allen and J. H. Eberly. Optical Resonance and Two-Level Atoms. Wiley, New York, 1975.
3. A. Bambini and P. R. Berman. Phys. Rev., A, 23, 2496 (1981).
4. H. W. Lee and T. F. George. Phys. Rev., A, 29, 2509 (1984).
5. F. T. Hioe and C. E. Carroll. J. Opt. Soc. Amer. B, 3, 497 (1985).
6. C. E. Carroll and F. T. Hioe. J. Phys. A, 19, 3579 (1986).
7. A. M. Ишханян. Изв. АН Арм. ССР, Физика, 23, 190 (1988).
8. S. V. Prants. Phys. Lett. A, 144, 225 (1990).
9. V. Boffa, S. Bollanti, G. Dattoli, and A. Torre. Nuovo Cimento B, 99, 53 (1987).
10. Э. Камке. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Москв., Наука, 1976.

ԻՆՎԱՐԻԱՆՏՆԵՐԻ ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ ՄՈՏԵՑՈՒՄԸ
ԵՐԿՄԱԿԱՐԴԱԿ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆՈՒՄ

Ա. Մ. ԻՇԽԱՆՅԱՆ

Դիտարկված է երկմակարդակ խնդրի անալիտիկ լուծման հարցը ընդհանուր դրվածքով: Ցույց է տրված, որ ինվարիանտների հավասարման լուրջաբանչյուր լուծում ձևում է լուծվող դեպքերի անսահման դաս: Անկախ փոփոխականի ձևափոխման ընդհանրացմամբ՝ կոմպլեքս-արժեք դեպքի համար գտնված են նոր լուծվող մոդելներ:

APPROACH OF THE EQUATION OF INVARIANTS
IN THE THEORY OF TWO-LEVEL SYSTEMS

A. M. ISHKHANYAN

The integrability of the two-level problem in terms of analytical functions is considered in general formulation of the problem. It is shown that each solution of the equation of invariants gives rise to an infinite class of integrable cases. By generalization of the transformation of independent variable on complex-value case, new integrable models are found.