

ЛАНДАУЭРСКОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ СИСТЕМЫ ИЗ ПЕРИОДИЧЕСКИ РАСПОЛОЖЕННЫХ СЛУЧАЙНЫХ БЛОКОВ

А. Ж. ХАЧАТРЯН

(Поступила в редакцию 12 марта 1996 г.)

Государственный инженерный университет Армении

В работе найдено точное выражение среднего сопротивления системы из периодически расположенных случайных δ -блоков для энергии падающего электрона, соответствующей центру зоны одиночного блока. Показано, что нарушение периодичности в расположении рассеивателей цепочки приводит к уменьшению радиуса локализации электронных состояний по сравнению с радиусом локализации этих же состояний в строго периодической системе.

1. Введение

Известно, что задача выяснения характера локализации электронов в одномерной неупорядоченной системе вне зависимости от характера беспорядка внутри системы сводится к задаче исследования характера рассеяния электронов на этой системе. Исходя из факта полной локализации электронов в одномерной неупорядоченной системе, можно утверждать, что характер зависимости среднего сопротивления $\langle \rho \rangle$ системы при нулевой температуре от ее длины L при $L \rightarrow \infty$ не зависит от характера беспорядка внутри системы и от энергии электрона. Радиус локализации электрона в неупорядоченном металле с примесями при нулевой температуре можно записать в виде [1-5]

$$\xi = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{L}{\ln \langle \rho(L) \rangle}, \quad (1)$$

причем он не зависит от L , а зависит от вида случайного поля и энергии электрона. Здесь $\langle \rho(L) \rangle$ есть усредненное по всевозможным реализациям случайного поля Ландауэрское сопротивление. Другими словами, задача определения радиуса локализации электронов сводится к задаче нахождения $\langle \rho(L) \rangle$.

Общеизвестно, что процедура нахождения средних физических характеристик неупорядоченных систем связана в первую очередь с большими математическими трудностями. Аналитический подход к решению задач данного класса в основном ограничивается случаями слабого и сильного рассеивающих полей [6]. Эффекты локализации во всем спектре значений энергии электрона часто приходится рассматривать численными методами [7—9].

В работах [10, 11] удалось точно решить задачу нахождения

среднего Ландауэрского сопротивления в модели из периодически расположенных случайных δ -рассеивателей. В [11] также была найдена аналитическая зависимость радиуса локализации состояний от энергии электрона и параметров беспорядка цепочки из периодически расположенных случайных δ -потенциалов с нулевыми средними значениями.

В данной работе найдено точное выражение $\langle \rho(L) \rangle$ системы из периодически расположенных блоков, когда блоки системы представляют собой цепочки из периодически расположенных случайных δ -потенциалов, при энергии электрона, соответствующей центру зоны одиночного блока. Для этих же энергий найден радиус локализации одноэлектронных состояний при любом значении параметра беспорядка системы.

2. Сопротивление одномерной цепочки из случайных δ -потенциалов

Как показано в [12], усредненное по всевозможным реализациям случайного поля, сопротивление цепочки из N δ -потенциалов в наиболее общем случае можно представить в виде ряда:

$$\langle \rho_N \rangle = \sum_{p=1}^N \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_p} \alpha^p 2^{p-1} \prod_{l=1}^{p-1} (1 - \cos 2k(x_{j_{l+1}} - x_{j_l})), \quad (2)$$

где $x_1, x_2, \dots, x_N$ — координаты δ -рассеивателей, а параметр α представляет собой отношение среднеквадратичного значения амплитуды V_N случайного поля к энергии падающих электронов:

$$\alpha = \frac{\langle V_N^2 \rangle}{4k^2} = \frac{1}{W} \int_{-\frac{W}{2}}^{\frac{W}{2}} \frac{V_N^2}{4k^2} f(V_N) dV_N, \quad (3)$$

где $f(V_N)$ — функция распределения случайной величины V_N в интервале $\left[-\frac{W}{2}; \frac{W}{2}\right]$, $k^2 = E$ — энергия электрона. В [12] также было найдено представление в виде ряда для коэффициента отражения электрона от цепочки из N произвольных δ -потенциалов, которое позволило провести усреднение ρ по параметрам задачи $V_1, V_2, \dots, V_N$. Это представление имеет вид

$$T^{-1} = D_N \cdot D_N^*, \quad (4)$$

где

$$D_N = 1 + \sum_{p=1}^N \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_p} \frac{iV_{j_1}}{2k} \frac{iV_{j_2}}{2k} \dots \frac{iV_{j_p}}{2k} \prod_{l=1}^{p-1} (1 - \exp i2k(x_{j_{l+1}} - x_{j_l})). \quad (5)$$

В дальнейшем мы будем рассматривать только такие модели неупорядоченных сред, в которых расстояние между двумя произволь-

ными δ -рассеивателями в цепочке является кратным некоторой длине a , т. е.

$$(x_k - x_n) = la \quad (l=1, 2, 3, \dots). \quad (6)$$

Отсюда видно, что случай $|x_k - x_n| = |k - n|a$ соответствует модели цепочки из N периодически расположенных δ -рассеивателей.

Сравнивая (2) и (5), можно заметить, что для квазипериодических решеток, удовлетворяющих условию (6), общий член ряда $2\langle \rho_N \rangle$ при энергии электрона $ka = \frac{\pi}{2} + \pi m, (m=0, 1, 2, \dots)$ совпадает с общим членом ряда $(D_N - 1)$, если только заменить в последнем все параметры $\frac{iV_N}{2k}$ на $2a$. Следовательно, для указанных решеток между D_N и $\langle \rho_N \rangle$ имеется простая связь:

$$\langle \rho_N \rangle = \frac{1}{2} (\bar{D}_N - 1), \quad (7)$$

где $\bar{D}_N$ получается из D_N заменой всех $\frac{iV_N}{2k}$ на $2a$ при $ka = \frac{\pi}{2} + \pi m$:

$$\bar{D}_N = D_N \left(\frac{iV_1}{2k} = 2a, \frac{iV_r}{2k} = 2a, \dots, \frac{iV_N}{2k} = 2a, ka = \frac{\pi}{2} + \pi m \right). \quad (8)$$

Интересно также рассмотреть задачу нахождения среднего $\langle \rho \rangle$ цепочек из δ -потенциалов, когда рассеиватели в цепочке расположены непериодично или же периодичность в расположении рассеивателей частично нарушена. Это позволит, в частности, исследовать те особенности, которые вносит периодическое расположение примесей в характер локализации электронов. Отметим, что модели со всевозможными нерегулярностями в расположении рассеивателей широко рассматриваются в литературе и обычно решаются численно (см. [13, 14]). Как мы покажем ниже, использование соотношения (7) позволяет для некоторых квазипериодических решеток получить аналитическую зависимость радиуса локализации электронных состояний при $ka = \frac{\pi}{2} + \pi m$ от параметров беспорядка цепочки.

3. Сопротивление цепочки в обобщенной модели Кронига-Пенни

Для начала с помощью соотношения (7) определим зависимость $\langle \rho_N \rangle$ от N и a при $ka = \frac{\pi}{2} + \pi m$ в случае простой модели Кронига-Пенни. Как было показано в работе [15], в случае периодически расположенных N δ -рассеивателей с равными $V_1 = V_2 = \dots = V_N = V$ выражение (5) для D_N имеет вид

$$D_N = e^{ikaN} \left\{ \cos N\beta_1 a + i \operatorname{Im} \left(e^{-ika} \left(1 + \frac{iV}{2k} \right) \frac{\sin N\beta_1 a}{\sin \beta_1 a} \right) \right\}, \quad (9)$$

где

$$\cos \beta_1 \alpha = \operatorname{Re} \left(e^{-ika} \left(1 + \frac{iv}{2k} \right) \right). \quad (10)$$

Этот результат в [15] был получен как детерминант матрицы $\hat{D}_N$ $\left(\delta_{lp} + \frac{iV}{2k} \exp ika |l-p| \right)$. В [11] было показано, что его можно получить также путем непосредственного суммирования ряда (5) при $V_1 = V_2 = \dots = V_N$.

Как видно из (10), случай $\cos \beta_1 \alpha > 1$ соответствует спектру запрещенных значений энергии электрона в бесконечной решетке, а случай $\cos \beta_1 \alpha \leq 1$ соответствует спектру разрешенных значений энергии электрона.

Выражение $\hat{D}_N$ получается из (9) на основании соотношения (8). Далее, после некоторых преобразований можно из (7) получить выражение для среднего сопротивления цепочки:

$$\langle \rho_N \rangle = \frac{1}{2} \left(\frac{(u+v)^N + (u-v)^N}{2} + \frac{(u+v)^N - (u-v)^N}{2v} - 1 \right), \quad (11)$$

где $u = 2\alpha$, $v = \sqrt{1 + (2\alpha)^2}$.

Отметим, что результат (11) был получен в работах [11, 12] путем непосредственного суммирования ряда (2) при $ka = \frac{\pi}{2}$.

Рассмотрим теперь задачу о рассеянии электрона на системе из периодически расположенных δ -блоков, т. е. когда рассеивающий потенциал имеет вид

$$V(x) = \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N V_{nm} \delta(x - md - na), \quad (12)$$

где M — число блоков системы, N — число рассеивателей в одном блоке. Параметр V_{nm} есть мощность n -ого δ -потенциала m -того блока системы. Период системы d можно представить в виде

$$d = (N-1)a + b, \quad (13)$$

где a — период расположения δ -рассеивателей в блоках системы, b — расстояние между соседними блоками системы.

Как было показано Таулессом [16], спектр электрона в бесконечной системе из периодически расположенных идентичных δ -блоков определяется амплитудой t прохождения электрона через один блок системы, причем

$$\operatorname{Re}(1/t) = \cos \beta d. \quad (14)$$

Используя (14), результат (9) легко обобщить на случай цепочки из периодически расположенных идентичных δ -блоков. В случае, когда $V_{nm} = V$, сумма ряда D_N (5) имеет вид [17]

$$D_{NM} = e^{tkdM} \left\{ \cos M \beta_N d + i \operatorname{Im}(e^{-ikd} D_N) \frac{\sin M \beta_N d}{\sin \beta_N d} \right\}, \quad (15)$$

где

$$\cos \beta_N d = \operatorname{Re}(e^{-ikd} D_N). \quad (16)$$

Из (6) следует, что соотношение (7) можно использовать для выражения $\langle \rho \rangle$, если рассмотреть такую модель цепочки, когда имеет место условие $b=na$ ($n=1, 2, \dots$). Как видно из ряда (2), если расстояние между двумя произвольными δ -рассеивателями цепочки увеличить на расстояние, кратное $2a$, то сумма ряда при $ka = \frac{\pi}{2}$ не меняется. Поэтому, вообще говоря, локализация электрических состояний определяется асимптотической зависимостью среднего сопротивления $\langle \rho \rangle$ от числа рассеивателей в цепочке, а не его зависимостью от длины цепочки, как это указано в результате (1) работ [1-5].

Для нахождения $\bar{D}_{NM}$ заметим, что при $ka = \frac{\pi}{2}$, $\frac{V}{2k} = -i2\alpha$

$$\begin{aligned} \cos \beta_N d - \cos \frac{\pi}{2} \nu \left(\cos^2 N \frac{\pi}{2} \operatorname{ch} N \gamma a + \sin^2 \frac{\pi}{2} N \frac{\operatorname{ch} N \gamma a}{\operatorname{ch} \gamma a} \right) - \\ - i \sin \frac{\pi}{2} \nu \left(\sin^2 N \frac{\pi}{2} \operatorname{sh} N \gamma a + \cos^2 \frac{\pi}{2} N \frac{\operatorname{sh} N \gamma a}{\operatorname{ch} \gamma a} \right), \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(e^{-ikd} D_N) = -\sin \frac{\pi}{2} \nu \left(\cos^2 \frac{\pi}{2} N \operatorname{ch} N \gamma a + \sin^2 \frac{\pi}{2} N \frac{\operatorname{ch} N \gamma a}{\operatorname{ch} \gamma a} \right) - \\ - i \cos \frac{\pi}{2} \nu \left(\sin^2 \frac{\pi}{2} N \operatorname{sh} N \gamma a + \cos^2 \frac{\pi}{2} N \frac{\operatorname{sh} N \gamma a}{\operatorname{ch} \gamma a} \right), \end{aligned} \quad (18)$$

где $\operatorname{sh} \gamma a = 2\alpha$ и $\nu = d/a$.

Сначала рассмотрим простой случай $b=a$, т. е. $\nu=N$. Тогда решетка представляет собой цепочку из $N \cdot M$ периодически расположенных δ -рассеивателей одинаковой амплитуды. Как отмечалось выше, сопротивление такой цепочки при $ka = \frac{\pi}{2}$ совпадает с сопротивлением других цепочек, у которых расстояние между блоками равно $3a$, $5a$, $7a$ и т. д. Действительно, при $\nu = N + 2j$ ($j=1, 2, \dots$) с помощью (17), (18) и (15) можно показать, что выражение для среднего сопротивления имеет такой же вид (11), как для простых цепочек, у которых теперь число рассеивателей равно $N \cdot M$.

Рассмотрим теперь цепочку с $b=2a$, т. е. $\nu=N+1$. К этому случаю сводятся и случаи других решеток с $b=4a$, $6a$, $8a$, ... и т. д. В этом случае для $\langle \rho_{NM} \rangle$ уже не получается такого простого выражения, как (11). Когда N четное число, то

$$\langle \rho_{NM} \rangle = \frac{1}{2} \left\{ \frac{(A+B)^M + (A-B)^M}{2} + \operatorname{ch} N \gamma a \frac{(A+B)^M - (A-B)^M}{2B} - 1 \right\}, \quad (19)$$

где

$$A = \frac{\operatorname{ch} N \gamma a}{\operatorname{ch} \gamma a}, \quad B = \sqrt{1 + A^2}, \quad \operatorname{sh} \gamma = 2a. \quad (20)$$

При N нечетном $\langle \rho_{NM} \rangle$ имеет вид

$$\langle \rho_{NM} \rangle = \frac{1}{2} \left\{ \frac{(C+D)^M + (C-D)^M}{2} + \operatorname{sh} N \gamma a \frac{(C+D)^M - (C-D)^M}{2D} - 1 \right\}, \quad (21)$$

где

$$C = \frac{\operatorname{sh} N \gamma a}{\operatorname{ch} \gamma a}, \quad D = \sqrt{C^2 - 1}, \quad \operatorname{sh} \gamma = 2a. \quad (22)$$

Как видно из полученных формул, случай $v = N + 1$ качественно отличается от случая $v = N$, так как параметры M и N в выражение для $\langle \rho_{NM} \rangle$ входят уже не одинаковым образом.

Интересно рассмотреть частный случай $N = 1$, когда решетка представляет собой цепочку из M периодически (с периодом $d = b = 2a$) расположенных случайных δ -рассеивателей. В этом случае энергия $ka = \frac{\pi}{2}$ соответствует краю энергетической зоны для такой решетки ($kd = \pi$). Для $\langle \rho_{1M} \rangle$ из (21) имеем

$$\langle \rho_{1M} \rangle = Ma, \quad (23)$$

что совпадает с известным результатом для резонансного прохождения электрона через цепочку из периодически расположенных δ -потенциалов, когда энергия электрона соответствует краю энергетической зоны [18].

4. Характер локализации электронных состояний

Зная выражение для $\langle \rho \rangle$ в случае различных квазипериодических решеток типа (6), можно перейти к вычислению радиуса локализации электронных состояний, что определяется асимптотической зависимостью $\langle \rho \rangle$ от числа рассеивателей в цепочке. Выше, в частности, было показано, что для цепочек из N δ -потенциалов, расположенных периодически с периодом a , $3a$, $5a$, $7a$ и так далее, при энергии электрона $ka = \frac{\pi}{2} + \pi m$ зависимость $\langle \rho_N \rangle$ от N для всех моделей квазипериодических решеток одна и та же и имеет вид (11). Соответственно, радиус локализации состояний в квазипериодических решетках совпадает с радиусом локализации в периодической решетке:

$$\xi \sim \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{Na}{\ln \langle \rho_N \rangle} \quad (24)$$

и, как следует из (11),

$$\xi^{-1} a = \ln(2x + \sqrt{1 + (2x)^2}). \quad (25)$$

Как ясно из вышеизложенного, в случае обобщенной модели Кронига-Пенни, когда $b=a, 3a, 5a, 7a, \dots$ при $ka = \frac{\pi}{2} + \pi m$

$$\xi \sim \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{aN M}{\ln \langle \rho_{NM} \rangle} = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{aN M}{\ln \langle \rho_{NM} \rangle}, \quad (26)$$

т. е. радиус локализации снова определяется выражением (25).

Как мы увидим ниже, соотношение (26) нарушается в случае $b=2a, 4a, 6a, \dots$, исключение составляет лишь случай, когда число δ -рассеивателей в блоках системы N стремится к бесконечности. Как следует из (19), (21), при $N \rightarrow \infty$ радиус локализации снова определяется формулой (25). Данный результат имеет простой физический смысл: увеличение числа рассеивателей внутри блоков в пределе $N \rightarrow \infty$ должно привести к тому, что локализация электрона произойдет в пределах одного блока системы.

Рассмотрим характер локализации электрона, когда число рассеивателей N в блоках системы остается конечным, но число блоков системы $M \rightarrow \infty$. Как следует из (19) — (22), при четном N

$$\xi \sim \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{aN M}{\langle \rho_{NM} \rangle} = \frac{Na}{\ln(A+B)}, \quad (27)$$

а в случае нечетного N

$$\xi \sim \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{aN M}{\langle \rho_{NM} \rangle} = \frac{Na}{\ln(C+D)}, \quad (28)$$

где A, B, C и D определяются формулами (20), (21).

Как видно из (27), (28), радиус локализации состояний, в отличие от предыдущего случая (25), зависит от N .

Формулы (27) и (28) можно представить в более удобной форме:

$$a\xi^{-1} = \frac{1}{N} \operatorname{arcsch} \frac{\operatorname{sh} N \gamma a}{\operatorname{ch} \gamma a} \quad \text{при } N \text{ четном} \quad (29)$$

и

$$a\xi^{-1} = \frac{1}{N} \operatorname{arcch} \frac{\operatorname{ch} N \gamma a}{\operatorname{ch} \gamma a} \quad \text{при } N \text{ нечетном}, \quad (30)$$

где $\operatorname{sh} \gamma a = 2\lambda$.

Последний результат примечателен тем, что в нем нет ограничения на значение параметра беспорядка системы α .

При $N=1$, как следует из (30), $a\xi^{-1}=0$ и, следовательно, $\xi \rightarrow \infty$.

Поэтому, как было отмечено, электронные состояния $ka = \frac{\pi}{2} + \pi m$ являются делокализованными. Из вышеприведенных формул (см. также п.2) можно показать, что радиус локализации в случае периодической решетки больше, чем в случае обобщенной решетки. Как было показано выше, они равны лишь при $N \rightarrow \infty$. Отсюда мы приходим к естественному выводу о том, что периодическое расположение рассеивателей

ведет к увеличению радиуса локализации электронных состояний, а то время как непериодическое расположение рассеивателей ведет к уменьшению радиуса локализации.

Возможно, что такое соотношение между радиусами локализации может нарушаться при других значениях энергии электрона. Для выяснения этого вопроса необходимо найти зависимость радиуса локализации от энергии электрона в обобщенной модели Кронига-Пенни, а затем сравнить полученный результат с простой моделью Кронига-Пенни [11]. Эта задача ждет своего решения.

Автор выражает благодарность профессору В. М. Гаспаряну за постановку задачи, академику Д. М. Седракяну, профессору Д. М. Бадалян и профессору С. Г. Петросяну за полезное обсуждение полученных результатов.

Завершение данной статьи во многом стало возможным благодаря гранту № MVL000 Международного Научного Фонда Сороса.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. Landauer. *Phil. Mag.*, 21, 863 (1970).
2. F. W. Anderson, D. J. Thouless, E. Abrahams, D. S. Fisher. *Phys. Rev.*, B 22, 3519 (1980).
3. V. I. Melnikov. *Sov. Phys. Solid State*, 23, 444 (1981).
4. A. A. Abrikosov. *Solid State Commun.*, 37, 997 (1981).
5. N. Kumar. *Phys. Rev.*, B 31, 5513 (1985).
6. И. М. Лифшиц, С. А. Гредескул, Л. А. Пастур. Введение в теорию неупорядоченных систем. М., 1982, 416 с.
7. E. Cota, J. V. Jose, G. Monisvals. *Phys. Rev.*, B 35, 8929 (1987).
8. D. Gastello, A. Garo, A. Lopez. *Phys. Rev.*, B 36, p. 3002 (1987).
9. В. М. Гаспарян, И. Х. Жарекешев. *ФТТ*, 31, вып. 2, 162 (1989).
10. V. M. Gasparian, A. Gh. Khachatryan. *Solid State Commun.*, 12, 1061 (1993).
11. Д. М. Седракян, Д. А. Бадалян, В. М. Гаспарян, А. Ж. Хачатрян. *ЖЭТФ*, 109, 243 (1996).
12. V. M. Gasparian, A. Gh. Khachatryan. In: *Proc. Regional Conf. on Math. and Theor. Phys.*, Tavrız, Iran, p. 12—15, 1992.
13. B. J. Kollar and A. Suto. *Phys. Lett.*, A 117, 203 (1986).
14. H. M. Holzer. *Phys. Rev.*, B 38, 1709 (1988).
15. V. M. Gasparian, B. L. Altshuler, A. G. Aronov, Z. H. Kasamian. *Phys. Lett.*, A 132, 2012 (1988).
16. D. J. Thouless. *J. Phys. C.*, 5, № 1, 77 (1972).
17. V. M. Gasparian and M. Pollak. *Phys. Rev.* (in press).
18. M. Ya. Azbel. *Phys. Rev.*, B 27, 3901 (1983).

LANDAUER RESISTANCE FOR SYSTEM OF PERIODICALLY LOCATED RANDOM BLOCKS

A. Gh. KHACHATRIAN

In work a precise expression is found for an average resistance of system of periodically located random δ -blocks, for energy of falling electron to the appropriate center of the zone of the single block. It is shown, that infringement of periodicity in an arrange-

ment of scatterers of the chain results in reduction of localization radius of electronic states in comparison with radius of localization of the same states in strictly periodic system.

**ՊԱՐԲԵՐԱԲԱՐ ԴԱՍԱՎՈՐՎԱԾ ՊԱՏԱՀԱԿԱՆ ԲԼՈԿՆԵՐԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳԻ
ԼԱՆԴԱՌԻԵՌՅԱՆ ԴԻՄԱԴՐՈՒԹՅՈՒՆԸ**

Ա. Ժ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ

Դտնված է պարբերաբար դասավորված պատահական Ն-բլոկների համակարգի միջին դիմադրության ճշգրիտ արտահայտությունը համապատասխան մի բլոկի զոնայի կենտրոնի ընդհանուր էլեկտրոնի էներգիայի համար: Ցույց է տված, որ պարբերականության խախտումը բերում է էլեկտրոնային վիճակների լոկալիզացիայի շառավղի փոքրացման համեմատած նույն վիճակների լոկալիզացիայի շառավղի հետ խիստ պարբերական շղթայում: