

УДК 539.293.011:535

К ВОПРОСУ О КВАНТОВЫХ СОСТОЯНИЯХ НЕРЕЛЯТИВИСТСКОГО ЭЛЕКТРОНА В ОДНОМЕРНОМ КУЛОНОВСКОМ ПОЛЕ С КОНЕЧНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Э. М. КАЗАРЯН, А. М. ЧАЛАБЯН

Ереванский государственный университет

(Поступила в редакцию 25 ноября 1995 г.)

Исследованы энергетический спектр и волновые функции электрона в кулоновском поле с конечной глубиной потенциальной ямы. Определена глубина основного состояния, уточнена зависимость энергии возбужденных состояний от квантового номера N .

Проблема взаимодействия электрона с одномерным кулоновским полем возникла в связи с исследованием экситонного спектра поглощения в полупроводниках в квантующих магнитных полях. Аналогичные эффекты наблюдаются также и на поверхности нейтронных звезд в экстремально сильных магнитных полях, деформирующих атомное вещество, а также в примесных полупроводниках, где взаимодействие квазичастиц с примесями описывается эффективным кулоновским потенциалом.

Впервые проблема была рассмотрена в [1] Р. Лудоном в 1959 г. Затем к ней неоднократно возвращались различные авторы [2—4]. В результате были определены волновые функции и энергетический спектр системы, было дано объяснение двухкратному вырождению возбужденных уровней и наличию бесконечно глубокого основного состояния, локализованного на силовом центре. На основании этих результатов была построена теория экситонного поглощения в полупроводниках в квантующем магнитном поле [5] и предсказана возможность образования полимерных структур под влиянием сильного магнитного поля [6]. Вышеперечисленные результаты были получены в предположении бесконечности магнитного поля, чему соответствует потенциал кулоновского взаимодействия $U(x) = -e^2/(|x|+a)$, $a \rightarrow 0$ при $H \rightarrow \infty$. Однако при применении этих результатов для описания реальных полупроводниковых систем приходится считаться с отсутствием бесконечных магнитных полей в земных лабораторных условиях, и к тому же само приближение эффективной массы нарушается для полей $H > 10^7$ Э. Поэтому возникла необходимость уточнения ранее полученных результатов для сильных, но конечных магнитных полей ($H \sim 10^4 - 10^6$ Э), которым соответствует малое, но конечное отношение $\beta = 2a/a_b$, где a_b — боровский радиус электрона в поле примеси.

Если проводить решение задачи на основе уравнения Шредингера,

то на окончательном этапе оно сводится к дифференциальному уравнению

$$d^2\eta(z)/dz^2 + (\alpha/z - 1/4)\eta(z) = 0, \quad (1)$$

где

$$\alpha = h/a_b(-2mE)^{1/2}, \quad z = 2(|x| + a)/(a_b \cdot a). \quad (1^*)$$

Решением уравнения (1) являются функции Уиттекера:

$$\eta(z) = C_1 W_{\alpha/2}(z) + C_2 M_{\alpha/2}(z). \quad (2)$$

Так как второй член в (2) расходится на бесконечности, нужно считать $C_2 = 0$ и искать решение в виде логарифмической функции Уиттекера [7]. Вследствие симметричности кулоновского потенциала волновые функции должны быть либо четными, либо нечетными. Соответственно, в начале координат четные функции должны удовлетворять условию

$$dW_{\alpha/2}(z)_{z=0}/dz = 0, \quad (3)$$

а нечетные

$$W_{\alpha/2}(z)_{z=0} = 0. \quad (4)$$

Вид энергетического спектра должен быть определен из уравнений (3), (4). Однако следует иметь в виду, что они являются трансцендентными, и аналитические выражения можно получить в пренебрежении членами выше первого порядка малости по β . В этом приближении квантовые числа возбужденных уровней имеют следующий вид:

$$\alpha_{1N} = N + 1/[-\ln\beta + (\ln N - \psi(N) + 2\psi(1) - 1/2N)], \quad N = 1, 2, 3... \quad (5)$$

для состояний с четной волновой функцией, и

$$\alpha_{2N} = N + \beta/[1 - \beta \ln\beta + \beta(\ln N - \psi(N) + 2\psi(1) + 1)], \quad N = 1, 2, 3... \quad (6)$$

для состояний с нечетной волновой функцией (здесь $\psi(s) = d \ln \Gamma(s)/ds$). Вторые члены в правых частях (5), (6) являются малыми квантовыми поправками, обусловленными конечной глубиной потенциальной ямы. Третий член в знаменателе для квантовой поправки в выражении (6), строго говоря, является величиной выше первого порядка малости по β , однако он сохранен для демонстрации схожей зависимости поправок от N . Так как $\lim_{N \rightarrow \infty} [\ln(N) - \psi(N)] = 0$, причем сходимость быстрая, то величина каждой из поправок практически одинакова для всех состояний с большим N . Кроме этого, для всех N имеет место неравенство

$$\alpha_{1N} > \alpha_{2N}, \quad (7)$$

что и следовало ожидать.

Для сравнения отметим, что в [1] были получены следующие выражения для энергетического спектра:

$$\alpha_{1N} = N + 1/2 - \ln(\beta/N), \quad N = 1, 2, 3, \dots \quad (8^*)$$

$$\alpha_{2N} = N + \beta, \quad N = 1, 2, 3, \dots \quad (8^{**})$$

Выражения (8*), (8**), являясь приближенными, к тому же содержат существенно различную зависимость от N , что в пределе $N \rightarrow \infty$ приводит к нарушению соотношения (7), то есть очередности расположения состояний с четными и нечетными узлами, что противоречит основным принципам квантовой механики.

Основное состояние описывается четной волновой функцией. Соответственно, квантовое число α_0 определяется из трансцендентного соотношения

$$\alpha_0 = \beta \exp(1/2\alpha_0 - \psi(1)). \quad (9)$$

В [1] получено аналогичное уравнение, однако без учета фактора $\exp(-\psi(1))$. Учитывая, что энергия основного состояния обратно пропорциональна квадрату α_0 , это различие приводит к довольно значительному расхождению при определении значения энергии. Из соотношения (9) точное значение α_0 можно определить численными способами, однако очевидно, что оно лежит в интервале значений

$$\beta \exp(-\psi(1)) < \alpha_0 < 1, \quad (10)$$

из чего следует, что основное состояние, хотя и находится значительно глубже возбужденных уровней, в реальной ситуации отнюдь не является провалом на силовой центр. Более того, в обычном прямозонном полупроводнике основное состояние расположено достаточно близко от дна соответствующей энергетической зоны и может быть корректно рассмотрено в приближении эффективной массы.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. Loudon. Am. J. Phys., 27, 649, 1959.
2. Б. Б. Кадомцев. Письма в ЖЭТФ, 13, 61, 1971.
3. I. V. Lutsenko et al. Am. J. Phys., 22, 2739, 1989.
4. A. N. Sissakian et al. Phys. Letters A, 143, 247, 1990.
5. R. J. Elliott and R. Loudon. J. Phys. Chem. Solids, 15, 196, 1960.
6. Б. Б. Кадомцев. Письма в ЖЭТФ, 13, 15, 1971.
7. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, М., 1971.

TO THE PROBLEM OF NONRELATIVISTIC ELECTRON QUANTUM STATES IN ONE-DIMENSIONAL COULOMB FIELD WITH A FINITE POTENTIAL

E. M. KAZARIAN, A. M. CHALABIAN

The electron energy spectrum and the mode of wavefunctions in an one-dimensional finite Coulomb field are investigated. The depth of the ground state is determined and the dependence of excited states energies on the quantum number N is specified.

**ՎԵՐՋԱՎՈՐ ՊՈՏԵՆՑԻԱԼՈՎ ՄԻԱԶԱՓ ԿՈՒՆՈՆՑԱՆ ԴԱՇՏՈՒՄ
ՈՉ-ՌԵԼԻՑԱՏԻՎԻՍՏԻԿ ԷԼԵԿՏՐՈՆԻ ՔՎԱՆՏԱՅԻՆ ՎԻՃԱԿՆԵՐԻ
ՎԵՐԱՐԵՐՅԱԼ**

Է. Մ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, Ա. Մ. ԶԱԼԱՐՅԱՆ

Ուսումնասիրված են էլեկտրոնի էներգետիկ սպեկտրը և ալիքային ֆունկցիաների տեսքը միաշափ վերջավոր կոպոնյան դաշտում: Որոշված է հիմնական վիճակի խորությունը, և հաստատված է գրգռված վիճակների էներգիայի արժեքների կախվածությունը բլանտային N թվից: