Известия НАН Армении, Физика, т. 30, №6, с. 239—244 (1995)

УДК 537.87

ФУНКЦИЯ ГРИНА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНОЙ НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Л. Ш. ГРИГОРЯН, А. С. КОТАНДЖЯН, А. А. СААРЯН

Институт прикладных проблем физики НАН Армении

(Поступила в редакцию 1 сентября 1994 г.)

Определена функция Грина классического электромагнитного поля для среды, состоящей из произвольного числа соосных цилиндрических слоев. В качестве приложения общих формул вычислена интенсивность излучения заряда, вращающегося вокруг цилиндра, окруженного однородной средой.

1. *Введение.* Для управления потоком излучения, испускаемого различными системами, широко используются поверхности раздела сред. Хорошо известными примерами подобного рода являются черенковское излучение заряда, движущегося параллельно плоской границе раздела двух сред или летящего параллельно оси диэлектрического цилиндра [1, 2]. В начатом в [3, 4] цикле работ мы рассмотрим наиболее простые геометрии границ, когда возможно точное вычисление функции Грина (ФГ) электромагнитного поля, а именно: границы со сферической и цилиндрической симметриями. Случай сферически-симметричной среды рассмотрен в [4]. В [3] был предложен алгоритм решения уравнений Максвелла для среды, состоящей из произвольного числа соосных однородных цилиндрических слоев с разными диэлектрическими проницаемостями. В настоящей работе (пп. 2-4) он существенно упрощен путем замены дифференциального уравнения, описывающего ФГ, соответствующим интегральным уравнением Липмана-Швингера. Идея такой замены нами заимствована из [5, 6]. Выражения для температурной функции Грина в частных случаях цилиндра и цилиндрического слоя ранее были найдены в [7] другим методом. В п. 5 исследовано синхротронное излучение заряда, вращающегося вокруг диэлектрического цилиндра.

2. *Постановка задачи.* Рассмотрим электромагнитное поле, генерируемое плотностью тока $\mathbf{j}$ в цилиндрически-симметричной неоднородной среде с диэлектрической проницаемостью ε (магнитную проницаемость полагаем равной 1). Векторный потенциал определяется ФГ по формуле

$$A_i(x) = -\frac{1}{2\pi^2 c}\int G_{il}(x, x')j_l(x')d^4x', \quad x=(t, \mathbf{r}). \tag{1}$$

В соответствующим образом выбранной цилиндрической системе координат (ρ, φ, z) в силу симметрии среды

$$G_{ie}(x,x')=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\int dk\,d\omega\, G_{ie}(m,\ k,\ \omega,\ \rho,\ \rho')\exp\{i[m(\varphi-\varphi')+k(z-z')-$$
$$-\omega(t-t')]\}. \tag{2}$$

Уравнение для Фурье-образа ФГ G_{ie} $(m,\ k,\ \omega,\ \rho,\ \rho')$ следует из уравнений Максвелла. В калибровке Лоренца и в матричных обозначениях оно имеет вид

$$(F-V)\,G\,(\rho,\ \rho')=\frac{1}{\rho'}\,I\delta(\rho-\rho'),\quad V=\frac{1}{\varepsilon}\,\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\,D, \tag{3}$$

где I—единичная 3$\times$3 матрица здесь и ниже аргументы $m,\ k,\ \omega$ функции G_{ie} опускаются),

$$F=\begin{pmatrix} f & -2im/\rho^2 & 0\\ 2im/\rho^2 & f & 0\\ 0 & 0 & f+1/\rho^2\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}1/\rho+\partial/\partial\rho & im/\rho & ik\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \tag{4}$$

и, наконец,

$$f=\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\,\frac{\partial}{d\rho}\right)-\frac{m^2+1}{\rho^2}+\lambda^2,\quad \lambda=\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon-\frac{c^2k^2}{\omega^2}}\,. \tag{5}$$

С помощью функции $G^{(0)}$, являющейся решением укороченного уравнения

$$FG^{(0)}=\frac{1}{\rho'}\,I\delta(\rho-\rho') \tag{6}$$

(3) можно заменить интегральным уравнением Липмана-Швингера [4, 5]

$$G(\rho,\ \rho')=G^{(0)}(\rho,\ \rho')+\int_0^\infty G^{(0)}(\rho,\ \rho'')\,V(\rho'')G(\rho'',\ \rho')\rho''d\rho''. \tag{7}$$

Таким образом, процедура вычисления ФГ разбивается на два основных этапа: построение $G^{(0)}$ и решение уравнения (7).

3. *Построение функции* $G^{(0)}$. Для решения уравнения (6) заметим, что преобразованием

$$G^{(0)}=\Omega\overline{G}^{(0)}\Omega^{-1},\quad \boldsymbol{F}=\Omega\overline{F}\Omega^{-1} \tag{8}$$

с матрицей

$$\Omega=\begin{pmatrix}1 & -i\delta_m & 0\\ -i\delta_m & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\ \delta_m=\begin{cases}0, & m=0\\ 1, & m\neq 0\end{cases} \tag{9}$$

оно преобразуется к диагональному виду

$$\overline{F}\,\overline{G}^{(0)}=\frac{1}{\rho'}\,\delta(\rho-\rho'),\ \overline{F}=\mathrm{diag}\left(f-\frac{2m}{\rho^2},\ f+\frac{2m}{\rho^2},\ f+\frac{1}{\ }\right). \tag{10}$$

Решением этого уравнения является матрица

$$\bar{G}^{(0)}=\mathrm{diag}(g_{m+1}, g_{m-1}, g_m), \tag{11}$$

в которой функция g_m в свою очередь, является решением уравнения

$$(f+1/\rho^2)g_m(\rho, \rho')=\delta(\rho-\rho')/\rho'. \tag{12}$$

Исходная же матрица $G^{(0)}$ получается из (8), (9) и имеет вид

$$G^{(0)}=\frac{1}{1+\delta_m}\begin{pmatrix} g_{m+1}+\delta_m g_{m-1} & i\delta_m(g_{m+1}-g_{m-1}) & 0 \\ i\delta_m(g_{m-1}-g_{m+1}) & g_{m-1}+\delta_m g_{m+1} & 0 \\ 0 & 0 & g_m \end{pmatrix}. \tag{13}$$

До сих пор зависимость $\varepsilon=\varepsilon(\rho)$ предполагалась произвольной. Перейдем к рассмотрению частного случая: слоистой среды в виде $n+1$ соосных однородных цилиндрических слоев с диэлектрическими проницаемостями $\varepsilon_0, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_n$:

$$\varepsilon(\rho)=\varepsilon_0+\sum_{l=1}^{n}(\varepsilon_l-\varepsilon_{l-1})\vartheta(\rho-\rho_l), \tag{14}$$

$\vartheta(x)$ — ступенчатая функция Хевисайда. В каждом слое $\lambda=\mathrm{const}$ и (12) при $\rho\neq\rho'$ сводится к уравнению Бесселя. Пусть $\rho_j<\rho'<\rho_{j+1}$. Тогда везде, кроме $j+1$-го слоя,

$$g_m=q_i J_m(\lambda_i\rho)+p_i H_m^{(1)}(\lambda_i\rho), \quad \rho_i<\rho<\rho_{i+1}, \quad i\neq j, \tag{15}$$

в λ_i определяется выражением (5) с $\varepsilon=\varepsilon_i$. Здесь J_m и $H_m^{(1)}$ — функции Бесселя и Ханкеля I рода. Для упрощения записи в последующем $H_m^{(1)}$ мы заменяем на H_m. Из уравнения (3) следует, что ФГ, а поэтому функция g_m и ее первые производные должны быть непрерывными при $\rho=\rho_l$:

$$q_{l-1}J_m^{[l]}(\lambda_{l-1}\rho_l)+p_{l-1}H_m^{[l]}(\lambda_{l-1}\rho_l)=g_l J_m^{[l]}(\lambda_l\rho_l)+p_l H_m^{[l]}(\lambda_l\rho_l), \quad l=0, 1, \tag{16}$$

$y^{[l]}=\partial^l_y/\partial\rho^l$, причем $p_0=0$ и $q_n=0$. В $j+1$-ом слое

$$g_m=\begin{cases}\bar{q}_j J_m(\lambda_j\rho)+\bar{p}_j H_m(\lambda_j\rho), & \rho_j<\rho<\rho' \\ q_j J_m(\lambda_j\rho)+p_j H_m(\lambda_j\rho), & \rho'<\rho<\rho_{j+1}\end{cases} \tag{17}$$

со следующими условиями сшивки при $\rho=\rho'$:

$$\bar{q}_j J_m^{[l]}(\lambda_j\rho')+\bar{p}_j H_m^{[l]}(\lambda_j\rho')=q_j J_m^{[l]}(\lambda_j\rho')+p_j H_m^{[l]}(\lambda_j\rho')-\delta_{l1}/\rho', \quad l=0,1. \tag{18}$$

В (18) второе условие ($l=1$) получается путем интегрирования уравнения (12) в окрестности точки $\rho=\rho'$.

Например, в случае одной границы при $\rho=\rho_1$ получается:

$$g_m(\rho,\rho')=\frac{\pi}{2iW(J_m,H_m)}\begin{cases}J_m(\lambda_0\rho_<)H_m(\lambda_0\rho_>)W(J_m,H_m)- \\ \qquad -J_m(\lambda_0\rho)J_m(\lambda_0\rho')W(H_m,H_m), & \rho<\rho_1, \\ 2iJ_m(\lambda_0\rho')H_m(\lambda_1\rho)/\pi\rho_1, & \rho>\rho_1\end{cases} \tag{19}$$

в случае $\rho'<\rho_1$, и

$$g_m(\rho,\rho')=\frac{\pi}{2i\,W(J_m,H_m)}\begin{cases}2iJ_m(\lambda_0\rho)H_m(\lambda_1\rho')/\pi\rho_1, & \rho<\rho_1\\ J_m(\lambda_1\rho_<)H_m(\lambda_1\rho_>)\,W(J_m,H_m)-\\ \qquad -H_m(\lambda_1\rho)H_m(\lambda_1\rho')\,W(J_m,J_m), & \rho>\rho_1\end{cases}\tag{20}$$

в случае $\rho'>\rho_1$. В (19), (20) введены следующие обозначения:

$$W(a,b)=a(\lambda_0\rho_1)\frac{\partial}{\partial\rho_1}b(\lambda_1\rho_1)-b(\lambda_1\rho_1)\frac{\partial}{\partial\rho_1}a(\lambda_0\rho_1),\quad \rho_{\gtrless}=\genfrac{}{}{0pt}{}{\min}{\max}(\rho,\rho').\tag{21}$$

В общем случае $2n+2$ условия (16), (18) однозначно определяют $2n+2$ величины q_i, p_i, $\bar{q}_j$, $\bar{p}_j$ и тем самым—функцию g_m. Что же касается $G^{(0)}$, то оно определяется выражением (13).

4. *Решение уравнения Липмана-Швингера.* Перейдем ко второму этапу вычисления ФГ. Прежде всего заметим, что для «потенциалов» вида $V=\sum\limits_{l=1}^{n}V^{(l)}$ уравнение (7) можно заменить эквивалентной системой уравнений [4—6]:

$$G^{(l)}(\rho,\rho')=G^{(l-1)}(\rho,\rho')+\int\limits_0^{\infty}G^{(l-1)}(\rho,\rho'')\,V^{(l)}(\rho'')G^{(l)}(\rho'',\rho')\rho''d\rho'',\quad l=1,2,\ldots,n,\tag{22}$$

где $G^{(n)}=G$. В случае (14)

$$V^{(l)}=\frac{\varepsilon_l-\varepsilon_{l-1}}{\varepsilon(\rho)}\,\delta(\rho-\rho_l)D(\rho),\tag{23}$$

и (22) преобразуется в алгебраическое уравнение, решение которого есть

$$G^{(l)}(\rho,\rho')=G^{(l-1)}(\rho,\rho')+G^{(l-1)}(\rho,\rho_l)d(\rho_l)G^{(l-1)}(\rho_l,\rho')/\beta_l,\tag{24}$$

где

$$d(\rho_l)=\frac{\varepsilon_l D(\rho_l-0)-\varepsilon_{l-1}D(\rho_l+0)}{\varepsilon_l+\varepsilon_{l-1}},\quad \beta_l=\frac{2\varepsilon_l\varepsilon_{l-1}}{(\varepsilon_l^2-\varepsilon_{l-1}^2)\rho_l}-\mathrm{Sp}[d(\rho)G^{l-1}(\rho,\rho_l)]_{\rho=\rho_l}.\tag{25}$$

Например; в случае одной границы

$$\beta_1=\frac{\varepsilon_0}{(\varepsilon_1-\varepsilon_0)\rho_1}-\frac{\lambda_0}{2\rho_1}J_m(\lambda_0\rho_1)\sum_{l=\pm1}l\,\frac{H_{m+l}(\lambda_1\rho_1)}{W(J_{m+l},\mathrm{H}_{m+l})}.\tag{26}$$

В общем случае с помощью найденной в п. 3 функции $G^{(0)}$ и n-кратного применения рекуррентной формулы (24) можно вычислить исходную ФГ G.

5. *Излучение заряда, вращающегося вокруг диэлектрического цилиндра.* В качестве приложения полученных формул выведем выражение для интенсивности излучения заряда q, в плоскости $z=0$ равномерно вращающегося по окружности радиуса ρ_0 вокруг цилиндра радиуса ρ_1 ($\rho_1<\rho_0$). Плотность тока частицы

$$j_l=\rho v_l=\frac{vq}{\rho_0}\delta_{l2}\delta(\rho-\rho_0)\delta(\varphi-\omega_0 t)\delta(z),\ v=\omega_0\rho_0, \tag{27}$$

где ω_0—угловая скорость вращения. Подстановка этого выражения в (1) с учетом разложения (2) приводит к следующей формуле для векторного потенциала:

$$A_l(x)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{im(\varphi-\omega_0 t)}\int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{ikz}A_{ml},\qquad A_{ml}=-\frac{vq}{\pi c}G_{l2}(\rho,\rho_0)\Big|_{\omega=m\omega_0}. \tag{28}$$

В сумме по m слагаемое с $m=0$ не зависит от времени и убывает на бесконечности обратно пропорционально квадрату расстояния от заряда и, следовательно, не дает вклад в поле излучения. Поэтому далее можно полагать $m\neq 0$. Из (24) $(i=1)$, (20) и (13) после несложных вычислений получим:

$$A_{ml}=-\frac{vq}{4ci^{l-1}}\sum_{\alpha=\pm 1}\alpha^l B_m^{(\alpha)}H_{m+\alpha}(\lambda_1\rho),\quad l=1,2;\quad A_{m3}=0 \tag{29}$$

в области $\rho>\rho_0$. В (29)

$$\begin{gathered}B_m^{(\alpha)}=J_{m+\alpha}(\lambda_1\rho_0)-\tilde{W}^{-1}(J_{m+\alpha},H_{m+\alpha})[H_{m+\alpha}(\lambda_1\rho_0)W'(J_{m+\alpha},J_{m+\alpha})+\\+\frac{i\alpha\lambda_0}{\pi\rho_1^2\beta_1}J_m(\lambda_0\rho_1)J_{m+\alpha}(\lambda_0\rho_1)\sum_{p=\pm 1}W^{-1}(J_{m+p},H_{m+p})H_{m+p}(\lambda_1\rho_0).\end{gathered} \tag{30}$$

Имея A_{ml}, с помощью выбранной нами калибровки Лоренца можно вычислить скалярный потенциал и тем самым и напряженности электромагнитного поля. Входящие в эти выражения интегралы по k на больших расстояниях $(\rho\gg\rho_0)$ упрощаются методом стационарной фазы. После этого можно вычислить угловое распределение интенсивности излучения (усредненной по периоду движения частицы) на частоте $m\omega_0$:

$$\frac{dI_m}{d\Omega}=\frac{q^2m^2\omega_0^2\sqrt{\varepsilon_1}}{8\pi c}\beta^2[|B_m^{(+1)}-B_m^{(-1)}|^2+|B_m^{(+1)}+B_m^{(-1)}|^2\cos^2\vartheta],\quad \beta=\frac{v}{c}, \tag{31}$$

где ϑ—угол между направлением излучения и осью цилиндра,

$$\lambda_1=\frac{m\omega_0}{c}\sqrt{\varepsilon_1}\sin\vartheta,\quad \lambda_0=\frac{m\omega_0}{c}\sqrt{\varepsilon_0-\varepsilon_1\cos^2\vartheta}. \tag{32}$$

Рассмотрим предельные случаи общей формулы (31). В нерелятивистском пределе, когда $\lambda_i\rho_i\ll 1$, $i=0,1$, $\lambda_0\sim\lambda_1$, используя соответствующие предельные выражения для цилиндрических функций, получим

$$\frac{dI_m}{d\Omega}=\frac{q^2c\omega_0}{2\pi\sqrt{\varepsilon_1}}\left(\frac{y}{2}\right)^{2m}\frac{1+\cos^2\vartheta}{[(m-1)!\sin\vartheta]^2}\left|1+\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_0}{\varepsilon_1+\varepsilon_0}\left(\frac{\rho_1}{\rho_0}\right)^{2m}\right|^2, \tag{33}$$

где $y=m\beta\sqrt{\varepsilon_1}\sin\vartheta$. В случае $\rho_1\ll\rho_0$ имеем $\lambda_i\rho_1\ll 1$, $i=0,1$ для не слишком больших m и поэтому

$$\frac{dI_m}{d\Omega} = \left(\frac{dI_m}{d\Omega}\right)_{\text{од}} + \left(\frac{dI_m}{d\Omega}\right)_{\text{гр}}, \tag{34}$$

где первое слагаемое в правой части описывает интенсивность синхротронного излучения в однородной среде с диэлектрической проницаемостью ε_1[8, 9], а

$$\left(\frac{dI_m}{d\Omega}\right)_{\text{гр.}} = \frac{q^2\omega_0^2\beta^2\sqrt{\varepsilon_1}m}{c[(m-1)!\sin\vartheta]^2}\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_0}{\varepsilon_1+\varepsilon_0}y^{2m}\left(\frac{\rho_1}{\rho_0}\right)^{2m}\left[Y'_m(y)+\frac{m}{y}Y_m(y)\cos^2\vartheta\right]\times$$
$$\times\left[J'_m(y)+\frac{m}{y}J_m(y)\cos^2\vartheta\right]$$

—поправка, обусловленная границей, Y_m—цилиндрическая функция Неймана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. М. Болотовский. УФН, 75, 295(1961).
2. М. А. Агинян, Э. А. Бабаханян, Ян. Ши. Изв. АН Арм. ССР, Физика, 15, 247(1980).
3. Л. Ш. Григорян, А. А. Саарян, А. С. Искандарян. Изв. АН Арм. ССР, Физика, 25, 321(1990).
4. А. Р. Мкртчян и др. Препринт ИППФ—2—91, Ереван, 1991.
5. Y. Avishai, B. Band. Phys. Rev., A40, 5500 (1989).
6. А. Боум. Квантовая механика: основы и приложения. Изд. Мир, М., 1990.
7. А. М. Коротких, Б. М. Набутовский. ТМФ, 41, 388(1979).
8. В. Н. Цытович. Вестник МГУ, 11, 27(1951).
9. K. Kitao. Progr. Theor. phys., 23, 759 (1960).

ԷԼԵԿՏՐԱՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԴԱՇՏԻ ԳՐԻՆԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ՀԱՄԱՉԱՓՈՒԹՅԱՄԲ ԱՆՀԱՄԱՍԵՌ ՄԻՋԱՎԱՅՐՈՒՄ

Լ. Շ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ, Ա. Ս. ՔՈԹԱՆՋՅԱՆ, Ա. Ա. ՍԱՀԱՐՅԱՆ

Որոշված է դասական էլեկտրամագնիսական դաշտի Գրինի ֆունկցիան կամայական թվով համառանցք գլանային շերտերից բաղկացած միջավայրում։ Որպես ընդհանուր բանաձևերի կիրառություն հաշվարկված է համասեռ միջավայրում գտնվող դիէլեկտրիկ գլանի շուրջը պտտվող լիցքի ճառագայթման ինտենսիվությունը։

GREEN FUNCTION OF AN ELECTROMAGNETIC FIELD IN CYLINDRICALLY SYMMETRIC INHOMOGENEOUS MEDIUM

L. SH. GRIGORIAN, A. S. KOTANJIAN, A. A. SAHARIAN

The Green function of classical electromagnetic field is derived for a medium consisting of an arbitrary number of coaxial cylindrical layers. As an application of the general formula the radiation intensity from a charged particle, rotating aroung the cylinder surrounded by a homogeneous medium, is calculated.