

К ТЕОРИИ ИЗЛУЧЕНИЯ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В СЛОИСТОЙ СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧЕСКОЙ СРЕДЕ. I.

С. Р. АРЗУМАНЯН, Л. Ш. ГРИГОРЯН, А. А. СААРЯН

Институт прикладных проблем физики НАН Армении

(Поступила в редакцию 1 сентября 1994 г.)

Рассчитана функция Грина электромагнитного поля в среде, состоящей из произвольного числа сферически-симметрических слоев с общим центром и разными диэлектрическими проницаемостями. Выведена формула для интенсивности излучения заряженной частицы, движущейся в такой среде.

Исследование излучения заряженной частицы в стопке пластин ознаменовалось открытием рентгеновского переходного излучения и созданием детекторов ультрарелятивистских заряженных частиц (см., например, [1—4] и приведенные там ссылки). Мы рассмотрим один из аспектов этой проблемы, связанный с переходом от плоскопараллельных слоев к сферически-симметрическим слоям. В [5] изучено переходное излучение частицы на проводящем шаре. Излучение нерелятивистской частицы, вращающейся в вакууме вокруг диэлектрического шара, рассчитано в [6].

Итак, рассмотрим частицы, движущиеся произвольным образом в среде, составленной из $n \geq 1$ сферически-симметрических слоев с общим центром и разными диэлектрическими проницаемостями $\varepsilon = \varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}$, которые окружены однородной средой с $\varepsilon = \varepsilon_n$ (магнитную проницаемость считаем равной 1). В сферической системе координат r, θ, φ с началом в центре слоев ε зависит только от радиальной координаты:

$$\varepsilon(r) = \varepsilon_0 + \sum_{k=1}^n (\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}) \theta(r - r_k), \quad (1)$$

где r_k — радиус k -го слоя, а $\theta(x)$ — ступенчатая функция Хевисайда. В калибровке Лоренца

$$\operatorname{div} \mathbf{A} - i\varepsilon \frac{\omega}{c} \varphi = 0 \quad (2)$$

4-потенциал электромагнитного поля $(\mathbf{A}, \varphi)$ определяется уравнением

$$\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \right) \mathbf{A} - \frac{1}{\varepsilon} (\nabla \varepsilon) \operatorname{div} \mathbf{A} = - \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad (3)$$

(см. [2, 7]), где $\mathbf{j}$ — соответствующая плотность электрического тока. Здесь и далее подразумеваются фурье-образы

$$f(\omega) = \int f(t) e^{i\omega t} \frac{dt}{2\pi}$$

всех величин $f(t)$, зависящих от времени. Воспользуемся тем обстоятельством, что произвольное векторное поле S можно разложить в ряд по шаровым векторам:

$$S(r) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sum_{\mu=1}^3 S_{lm}^{(\mu)}(r) X_{lm}^{(\mu)}(\Omega), \quad (4)$$

где

$$S_{lm}^{(\mu)}(r) = \int X_{lm}^{(\mu)*}(\Omega) \cdot S(r) d\Omega, \quad (5)$$

а $X_{lm}^{(\mu)}$ — шаровые векторы продольного ($\mu=1$), электрического ($\mu=2$) и магнитного ($\mu=3$) типов [8]:

$$X_{lm}^{(1)} = n Y_{lm}(\Omega), \quad X_{lm}^{(2)} = \frac{\nabla_n Y_{lm}}{\sqrt{l(l+1)}}, \quad (6)$$

$$X_{lm}^{(3)} = \frac{n \times \nabla_n}{\sqrt{l(l+1)}} Y_{lm}, \quad n = r/r, \quad X_{00}^{(2)} = X_{00}^{(3)} = 0.$$

Оператор

$$\nabla_n \equiv r(\nabla - n \partial/\partial r) = e_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{e_\varphi}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (7)$$

действует на функции, зависящие от n , а $Y_{lm}(\Omega)$ — сферические гармоники, удовлетворяющие уравнению

$$\Delta_n Y_{lm} = -l(l+1) Y_{lm}, \quad (8)$$

$\Delta_n = \nabla_n \cdot \nabla_n$ — угловая часть оператора Лапласа. Подставив разложения (4) для вектор-потенциала A и плотности тока j в (3), после преобразований получим

$$\sum_{\nu=1}^3 \left[F_{\mu\nu}(r; l) + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \delta_{\mu\nu} - \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} D_{\mu\nu}(r; l) \right] A_{\nu}^{lm}(r) = -\frac{4\pi}{c} j_{\mu}^{lm}(r), \quad (9)$$

где матрицы $\hat{F}$ и $\hat{D}$ имеют вид

$$\hat{F} = \begin{pmatrix} \Delta_l - \frac{2}{r^2}, & \frac{2\alpha}{r^2}, & 0 \\ 2\alpha/r^2, & \Delta_l, & 0 \\ 0, & 0, & \Delta_l \end{pmatrix}, \quad \hat{D} = \begin{pmatrix} \frac{2}{r} + \frac{\partial}{\partial r}, & -\frac{\alpha}{r}, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

а

$$\Delta_l = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{\alpha^2}{r^2}, \quad \alpha = \sqrt{l(l+1)}. \quad (11)$$

Решение (9) можно представить в виде

$$A_{\mu}^{lm}(r) = -\frac{1}{c} \sum_{\nu=1}^3 \int_0^{\infty} G_{\mu\nu}(r, x; l) j_{\nu}^{lm}(x) dx, \quad (12)$$

где $G_{\mu\nu}$ — функция Грина, удовлетворяющая уравнению

$$\left(\hat{F} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \hat{I} - \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \hat{D}\right) \hat{G}(r, r') = 4\pi \hat{I} \delta(r - r'), \quad (13)$$

а $\hat{I}$ — единичная матрица размерности 3×3 . Следуя предложенному в [9] (см. также [10]) методу вычисления одночастичной функции Грина, заменим (13) интегральным уравнением Липпмана-Швингера

$$\hat{G} = \hat{G}^{(0)}(r, r'; l) + \int_0^\infty \hat{G}^{(0)}(r, x; l) \cdot \hat{V}(x; l) \cdot \hat{G}(x, r'; l) dx \quad (14)$$

с «потенциалом»

$$\hat{V}(r; l) = \frac{1}{4\pi \varepsilon(r)} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \hat{D}(r; l) \quad (15)$$

и вспомогательной функцией $\hat{G}^{(0)}$, удовлетворяющей более простому уравнению

$$\left(\hat{F} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \hat{I}\right) \hat{G}^{(0)}(r, r') = 4\pi \hat{I} \delta(r - r'). \quad (16)$$

Подстановкой (15) в (14) с учетом (16) можно убедиться, что (14) действительно является решением (13).

Таким образом, для вычисления электромагнитного поля зарядов необходимо сначала определить $\hat{G}^{(0)}$, а затем — решить уравнение Липпмана-Швингера (14).

Преобразованием подобия

$$\hat{F}(l) = \hat{\chi}_l \cdot \hat{F}(l) \cdot \hat{\chi}_l^{-1}, \quad (17)$$

где

$$\hat{\chi}_l = \begin{pmatrix} \sigma_l & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_l = \frac{1}{\sqrt{2l+1}} \begin{pmatrix} \sqrt{l} & \sqrt{l+1} \\ \sqrt{l+1} & -\sqrt{l} \end{pmatrix}, \quad (18)$$

матрица $\hat{F}$ диагонализируется:

$$\hat{F} = \text{diag}(\Delta_{l-1}, \Delta_{l+1}, \Delta_l), \quad (19)$$

а (16) еще более упрощается:

$$\left(\hat{F} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \hat{I}\right) \hat{G}^{(0)} = 4\pi \hat{I} \delta(r - r'). \quad (20)$$

При этом

$$\hat{G}^{(0)} = \hat{\chi}_l \cdot \hat{G}^{(0)} \cdot \hat{\chi}_l^{-1}, \quad \hat{\chi}_l = \hat{\chi}_l^{-1}, \quad \hat{\sigma}_l^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Решением (20) является

$$\hat{G}^{(0)} = \text{diag}(g_{l-1}, g_{l+1}, g_l), \quad (22)$$

где $g_l(r, r')$ удовлетворяют уравнению

$$\left(\Delta_l + \frac{\omega^2}{c^2}\right)g_l = 4\pi\delta(r - r'). \quad (23)$$

В (23) фигурирует $\partial^2 g_l / \partial r'^2$, и поэтому g_l и $\partial g_l / \partial r$ должны быть непрерывными функциями при $r \neq r'$. Нахождение $g_l(r, r')$ не представляет особых трудностей. Детали расчетов и окончательное выражение для g_l приведены в [11]. Там же выведена новая формула суммирования для шаровых векторов, которая осталась незамеченной авторами [12].

Перейдем к решению (14). Подставив (1) в (15), получим

$$\hat{G}(r, r') = \hat{G}^{(0)}(r, r') + \sum_{k=1}^n \int_0^{\infty} \hat{G}^{(0)}(r, x) \cdot \hat{V}^{(k)}(x) \cdot \hat{G}(x, r') dx, \quad (24)$$

где

$$\hat{V}^{(k)}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon(r)} (\epsilon_k - \epsilon_{k-1}) \delta(r - r_k) \hat{D}(r). \quad (25)$$

Теперь рассмотрим систему уравнений

$$\hat{G}^{(1)} = \hat{G}^{(0)} + \int_0^{\infty} \hat{G}^{(0)} \cdot \hat{V}^{(1)} \cdot \hat{G}^{(1)} dx, \quad (26.1)$$

$$\hat{G}^{(2)} = \hat{G}^{(1)} + \int_0^{\infty} \hat{G}^{(1)} \cdot \hat{V}^{(2)} \cdot \hat{G}^{(2)} dx, \quad (26.2)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\hat{G}^{(n)} = \hat{G}^{(n-1)} + \int_0^{\infty} \hat{G}^{(n-1)} \cdot \hat{V}^{(n)} \cdot \hat{G}^{(n)} dx. \quad (26.n)$$

Уравнение (26.2) умножим на $\hat{G}^{(0)}(y, r) \cdot \hat{V}^{(1)}(r)$ и проинтегрируем по r от нуля до бесконечности. После простых преобразований получим

$$\hat{G}^{(2)} = \hat{G}^{(0)}(r, r') + \int_0^{\infty} \hat{G}^{(0)}(r, x) [\hat{V}^{(1)}(x) + \hat{V}^{(2)}(x)] \hat{G}^{(0)}(x, r') dx. \quad (27)$$

Аналогичным образом из (26.3) и (27) находим

$$\hat{G}^{(3)} = \hat{G}^{(0)}(r, r') + \int_0^{\infty} \hat{G}^{(0)}(r, x) [\hat{V}^{(1)}(x) + \hat{V}^{(2)}(x) + \hat{V}^{(3)}(x)] \hat{G}^{(0)}(x, r') dx. \quad (28)$$

И так далее...

$$\hat{G}^{(n)} = \hat{G}^{(0)}(r, r') + \sum_{k=1}^n \int_0^{\infty} \hat{G}^{(0)}(r, y) \cdot \hat{V}^{(k)}(x) \cdot \hat{G}^{(n)}(x, r') dx. \quad (29)$$

Сравнивая (24) и (29), видим, что система зацепляющихся уравнений (26) позволяет определить искомую функцию Грина:

$$\hat{G}(r, r'; l) = \hat{G}^{(n)}(r, r'; l). \quad (30)$$

Идею подобного метода вычисления функции Грина мы заимствовали из [9].

Подставив (25) в (26), после преобразований (см. [11]) получим

$$\hat{G}^{(k)}(r, r'; l) = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_l \hat{R}_l^{(k)} \hat{\sigma}_l & 0 \\ 0 & g_l \end{pmatrix}, \quad k=1, 2, \dots, n, \quad (31)$$

где

$$\hat{R}_l^{(k)}(r, r') = \hat{R}_l^{(k-1)}(r, r') + \frac{\hat{R}_l^{(k-1)}(r, r_k) \cdot \hat{Q}_l(r_k, r')}{1 - \text{Sp} \hat{Q}_l(r_k, r_k)}, \quad (32)$$

$$\hat{R}_l^{(0)} = \text{diag}(g_{l-1}, g_{l+1}),$$

$$\hat{Q}_l(r_k, r') = \frac{\varepsilon_k^2 - \varepsilon_{k-1}^2}{8\pi \varepsilon_k \varepsilon_{k-1}} \hat{\sigma}_l [\hat{\psi}_l(r) \hat{\sigma}_l \hat{R}_l^{(k-1)}(r, r')]_{r=r_k}, \quad (33)$$

$$\hat{\psi}_l(r) = \begin{pmatrix} d(r) & -\frac{1}{r} \sqrt{l(l+1)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

— матрицы размерности 2×2 ,

$$d(r) = \frac{2}{r} + \frac{\varepsilon^{-1}(r_-) \frac{\partial}{\partial r_-} + \varepsilon^{-1}(r_+) \frac{\partial}{\partial r_+}}{\varepsilon^{-1}(r_-) + \varepsilon^{-1}(r_+)}, \quad r_{\pm} = r \pm 0. \quad (34)$$

n -кратно применяя рекуррентное соотношение (32), с помощью (31) можно вычислить функцию Грина $\hat{G} = \hat{G}^{(n)}$. Далее, подставив $\hat{G}$ в (12), можно вычислить электромагнитное поле

$$A = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sum_{\mu=1}^3 A_l^{lm}(r) X_{lm}^{(\mu)}(\Omega) \quad (35)$$

зарядов, движущихся произвольным образом в неоднородной сферически-симметрической среде. В частности, напряженность магнитного поля

$$H = -\frac{1}{r} \sum_{lm} \left\{ \sqrt{l(l+1)} A_3^{lm} X_{lm}^{(1)} + \frac{\partial r A_3^{lm}}{\partial r} X_{lm}^{(2)} + \left[\sqrt{l(l+1)} A_1^{lm} - \frac{\partial r A_2^{lm}}{\partial r} \right] X_{lm}^{(3)} \right\}, \quad (36)$$

а напряженность электрического поля

$$E = \frac{ic}{\omega \varepsilon} \sum_{lm} \left\{ q^{lm} X_{lm}^{(1)} + \left[\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon A_2^{lm} + \frac{1}{r} \sqrt{l(l+1)} b^{lm} \right] X_{lm}^{(2)} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon A_3^{lm} X_{lm}^{(3)} \right\}, \quad (37)$$

где

$$b^{lm} = \left(\frac{2}{r} + \frac{\partial}{\partial r} \right) A_1^{lm} - \frac{1}{r} \sqrt{l(l+1)} A_2^{lm},$$

$$q^{lm} = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon A_1^{lm} + \frac{\partial b^{lm}}{\partial r} - \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} b^{lm} =$$

$$= -\frac{4\pi}{c} j_1^{lm} + \frac{l(l+1)}{r^2} A_1^{lm} - \frac{1}{r^2} \sqrt{l(l+1)} \frac{\partial r A_2^{lm}}{\partial r} \quad (38)$$

(использовано уравнение (9) в случае $\mu=1$).

В волновой зоне, где доминирует поле излучения,

$$A_\mu^{lm}(r) \approx a_\mu^{lm} \frac{e^{i\lambda_n r}}{\lambda_n r}, \quad \lambda_n = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_n} \quad (39)$$

(коэффициенты a_μ^{lm} определяются из соответствующего разложения (12)), и поэтому

$$H \approx \frac{1}{ir} e^{i\lambda_n r} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l [a_3^{lm} X_{lm}^{(2)} - a_2^{lm} X_{lm}^{(3)}], \quad (40)$$

$$E \approx \frac{ie^{i\lambda_n r}}{r\sqrt{\varepsilon_n}} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l [a_2^{lm} X_{lm}^{(2)} + a_3^{lm} X_{lm}^{(3)}].$$

Как известно [7, 13], спектрально-угловое распределение интенсивности излучения за все время движения зарядов определяется формулой

$$\frac{dI}{d\omega d\Omega} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_n}} \lim_{r \rightarrow \infty} r^2 |H(r, \omega)|^2 = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_n}} |d|^2. \quad (41)$$

В случае, если заряды совершают периодическое движение с циклической частотой ω_0 , спектрально-угловое распределение интенсивности излучения на частоте ($\omega = k\omega_0$) после усреднения по периоду движения зарядов определяется формулой

$$\frac{dI_k}{d\Omega} = \frac{c}{2\pi\sqrt{\varepsilon_n}} \lim_{r \rightarrow \infty} r^2 |H(r, k)|^2 = \frac{c}{2\pi\sqrt{\varepsilon_n}} |d|^2. \quad (42)$$

Вектор

$$d = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l [a_3^{lm} X_{lm}^{(2)} - a_2^{lm} X_{lm}^{(3)}]. \quad (43)$$

Его можно представить также в виде

$$d = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l [a_2^{lm} X_{lm}^{(2)} + a_3^{lm} X_{lm}^{(3)}]. \quad (44)$$

Наконец, интегрируя по углам и используя условия ортонормировки шаровых векторов, находим

$$\frac{dI}{d\omega} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_n}} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l [|a_2^{lm}(\omega)|^2 + |a_3^{lm}(\omega)|^2], \quad (45.1)$$

$$I_k = \frac{c}{2\pi\sqrt{\varepsilon_n}} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l [|a_2^{lm}(k)|^2 + |a_3^{lm}(k)|^2]. \quad (45.2)$$

Слагаемые с $\mu=2$ соответствуют мультиполям электрического типа, а с $\mu=3$ — мультиполям магнитного типа. Связанное с продольным шаровым вектором $X_{lm}^{(1)}$ поле не излучается.

В следующей части работы вычислена интенсивность излучения заряженной частицы, равномерно вращающейся вокруг диэлектрического шара, окруженного однородной средой. Выведены соответствующие формулы для нерелятивистской и релятивистской частиц, а также для шара малого радиуса. В частных случаях они совпадают с ранее известными результатами.

Авторы признательны проф. А. Р. Мкртчяну за ценные обсуждения и критические замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Л. Тер-Микаелян. Влияние среды на электромагнитные процессы при высоких энергиях. Ереван, Изд. АН АрмССР, 1969.
2. Г. М. Гарибян, Ян Ши. Рентгеновское переходное излучение. Ереван, Изд. АН АрмССР, 1983.
3. В. Л. Гинзбург, В. Н. Цытович. Переходное излучение и переходное рассеяние. М., Наука, 1984.
4. В. А. Базылев, Н. К. Жеваго. Излучение быстрых частиц в веществе и во внешних полях. М., Наука, 1987.
5. Г. А. Аскарьян. ЖЭТФ, 29, 388 (1955).
6. М. Р. Магомедов. Изв. АН АрмССР, Физика 4, 271 (1969).
7. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред. М., Наука, 1982.
8. В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский. Квантовая электродинамика, М., Наука, 1980.
9. Y. Avishai, Y. B. Band. Phys. Rev., A 40, 5500 (1989).
10. А. Боум. Квантовая механика: основы и приложения. М., Мир, 1990.
11. А. Р. Мкртчян, Л. Ш. Григорян, А. А. Саарян, С. Р. Арзуманян. Препринт ИППФ-2-91, Ереван, 1991, 76 стр.
12. В. Р. Белоусов, В. М. Набутовский. ТМФ, 28, 381 (1976).
13. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Теория поля. М., Наука, 1973.

**ՇԵՐՏԱՎՈՐՎԱԾ ԿԵՆՏՐՈՆԱ-ՀԱՄԱԶԱՓ ՄԻՋԱՎԱՅՐՈՒՄ
ԼԻՅՔԱՎՈՐՎԱԾ ՄԱՍՆԻԿՆԵՐԻ ԶԱՌԱԳԱՅԹՄԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ. I.**

Ս. Ռ. ԱՐԶՈՒՄԱՆՅԱՆ, Լ. Շ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ, Ա. Ա. ՍԱՀԱՐՅԱՆ

Հաշված է էլեկտրամագնիսական դաշտի Գրինի ֆունկցիան կամայական թվով ընդհանուր կենտրոնով և տարբեր դիէլեկտրիկ թափանցելիություներով կենտրոնա-համաչափ շերտերից բաղկացած միջավայրի համար: Արտածված է բանաձև այդպիսի միջավայրում շարժվող մասնիկի ճառագայթման ինտենսիվության համար:

ON THE THEORY OF RADIATION OF CHARGED PARTICLES IN STRATIFIED SPHERICALLY-SYMMETRIC MEDIUM. I.

S. R. ARZUMANIAN, L. SH. GRIGORIAN, A. A. SAHARIAN

The Green function of the electromagnetic field is calculated for a medium consisting of an arbitrary number of spherically-symmetric layers having a common center and different permittivities. The formula is derived for the radiation intensity of charged particle moving in the such medium.